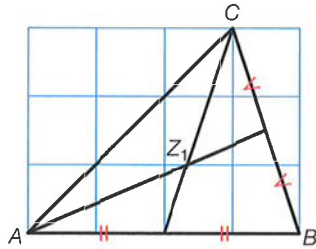


14 Meetkunde toepassen

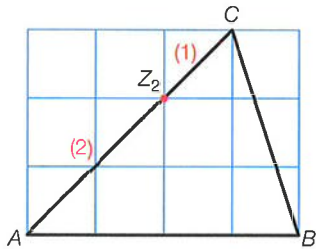
Voorkennis Zwaartelijnen van een driehoek

Bladzijde 48

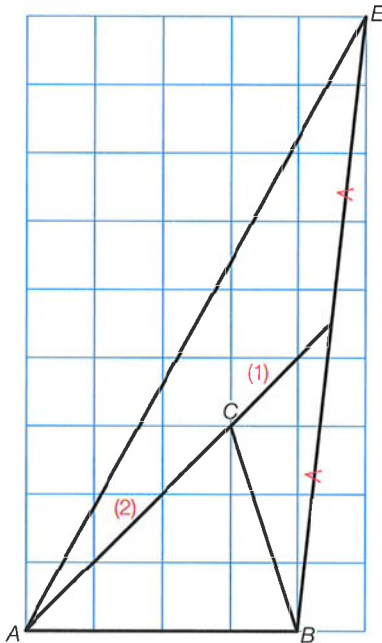
1 a



b



c



2 a $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b $CZ : MZ = 2 : 1$, dus $CZ = \frac{2}{3}CM$.

$$\text{Dus } \vec{z} = \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{CM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ en } Z(1\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}).$$

3 a $\frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dus $Z(-1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

- b Voor het midden M van DG geldt

$$\vec{m} = \vec{f} + \frac{1}{2}\vec{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{DM} = \vec{m} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \vec{d} + 2\vec{DM} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dus $G(17, 7)$.

14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices

Bladzijde 49

- 1 a $x > y$
 b $5AZ = 7BZ$, $AZ = x$ en $BZ = 24 - x$ geeft
 $5x = 7(24 - x)$
 $5x = 168 - 7x$
 $12x = 168$
 $x = 14$
 De afstand van A tot Z is 14.

- 2 a Er is ten opzichte van het zwaartepunt evenwicht van momenten, dus geldt $4AZ = 3BZ$.
 Dit geeft $BZ = \frac{4}{3}AZ$.
 b Substitutie van $BZ = \frac{4}{3}AZ$ in $AB = AZ + BZ$ geeft $AB = AZ + \frac{4}{3}AZ = \frac{7}{3}AZ$, dus $AZ = \frac{3}{7}AB$.
 c $\vec{z} = \vec{a} + \vec{AZ} = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} - \frac{3}{7}\vec{a} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} = \frac{1}{7}(4\vec{a} + 3\vec{b})$

Bladzijde 51

- 3 Voor het zwaartepunt Z van Z_1 met massa $m_1 + m_2$ en C met massa m_3 geldt

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot ((m_1 + m_2) \cdot \vec{z}_1 + m_3 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot ((m_1 + m_2) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b}) + m_3 \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{M} (m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) \text{ met } M = m_1 + m_2 + m_3.\end{aligned}$$

Bladzijde 52

- 4 Zie de figuur hiernaast.

A heeft massa 6.

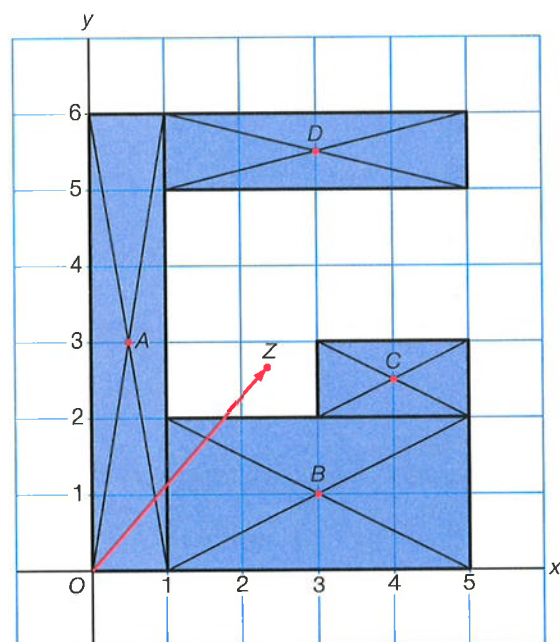
B heeft massa 8.

C heeft massa 2.

D heeft massa 4.

De totale massa is $6 + 8 + 2 + 4 = 20$.

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{20} (6 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{1}{20} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{20} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 47 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{47}{20} \\ \frac{53}{20} \end{pmatrix}\end{aligned}$$



5 a Zie de figuur hiernaast.

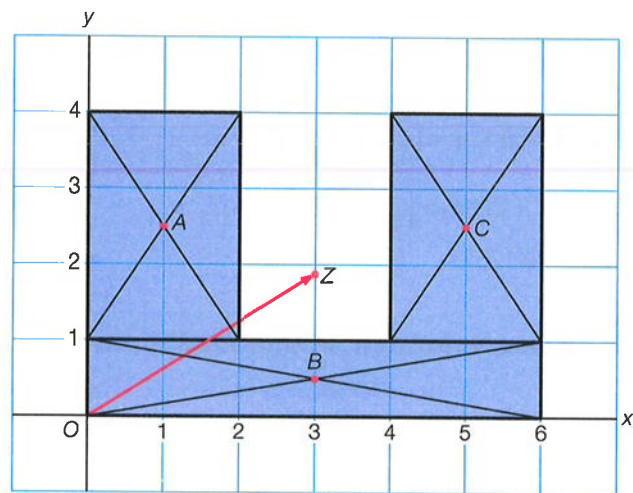
A heeft massa 6.

B heeft massa 6.

C heeft massa 6.

De totale massa is $6 + 6 + 6 = 18$.

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{18} (6 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{18} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Alternatieve uitwerking

Zie de figuur hiernaast.

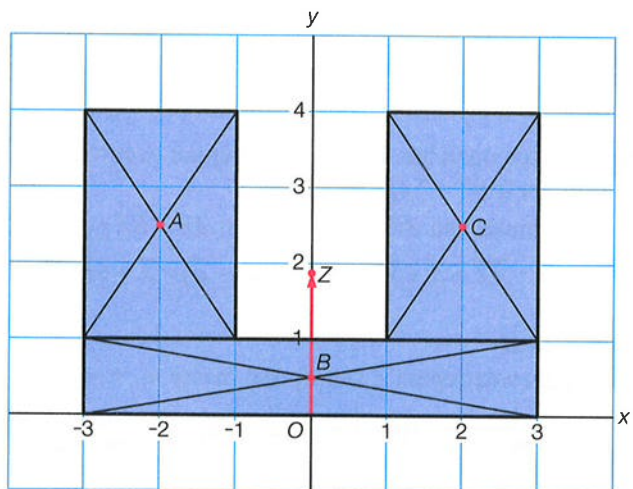
A heeft massa 6.

B heeft massa 6.

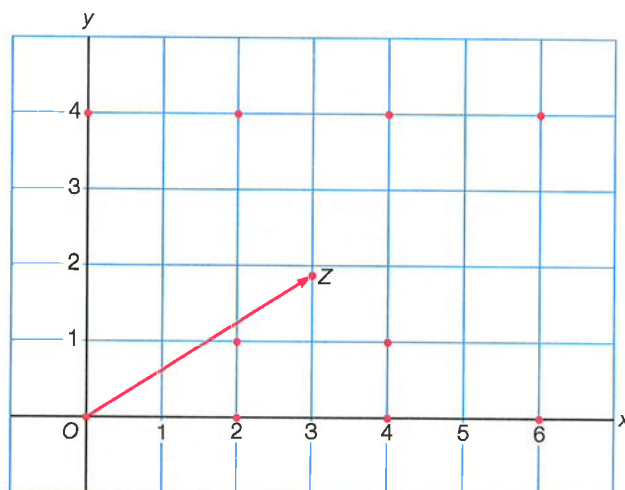
C heeft massa 6.

De totale massa is $6 + 6 + 6 = 18$.

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{18} (6 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{18} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}\end{aligned}$$



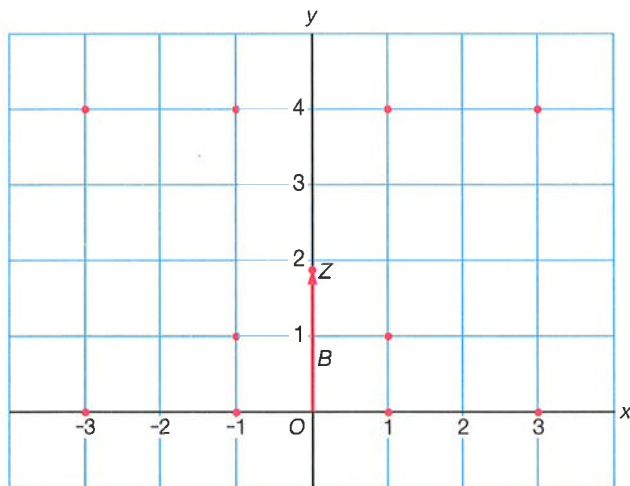
b



Zie de figuur.

Elke massa is 1 en de totale massa is 10.

$$\vec{z} = \frac{1}{10} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Alternatieve uitwerking

Zie de figuur.

Elke massa is 1 en de totale massa is 10.

$$\vec{z} = \frac{1}{10} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- 6** $AZ : MZ = 2 : 1$, dus $AZ = \frac{2}{3}AM$.

$$\text{Dus } \vec{z} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AM} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{a}).$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \text{ en dit geeft } \vec{z} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Bladzijde 53

- 7** Zie de figuur hiernaast.

A heeft massa 6.

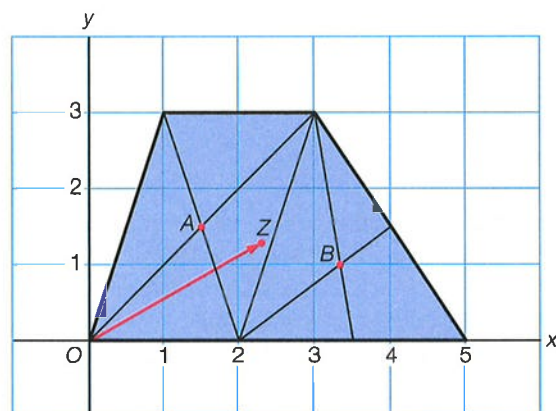
B heeft massa $4\frac{1}{2}$.

De totale massa is $10\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{10\frac{1}{2}} = \frac{2}{21}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{2}{21} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 4\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{2}{21} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{2}{21} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 13\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{7} \\ 1\frac{2}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



- 8** Zie de figuur hiernaast.

A heeft massa 4.

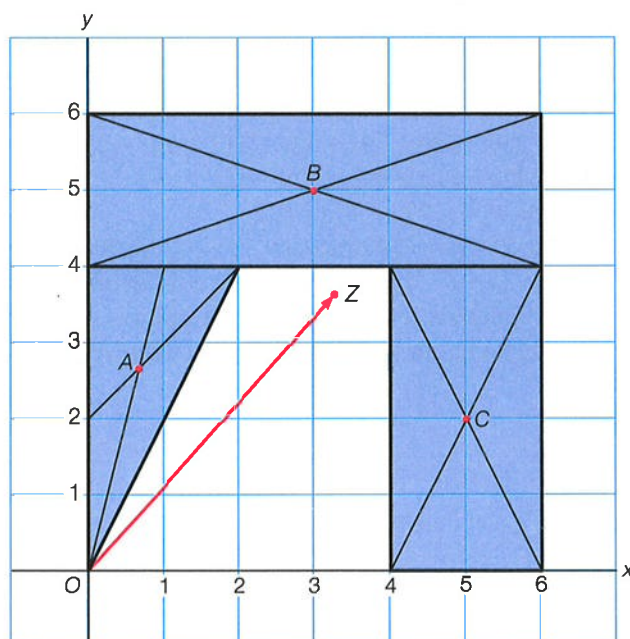
B heeft massa 12.

C heeft massa 8.

De totale massa is 24.

$$\vec{a} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{1}{24} \left(4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{24} \left(\begin{pmatrix} 10\frac{2}{3} \\ 28\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 16 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 78\frac{2}{3} \\ 86\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{5}{18} \\ 3\frac{11}{18} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



- 9 De totale massa is $4 + 6 + 2 + 3 = 15$.

$$\vec{z} = \frac{1}{15} \left(4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

Dus $Z(3, 3\frac{8}{15})$.

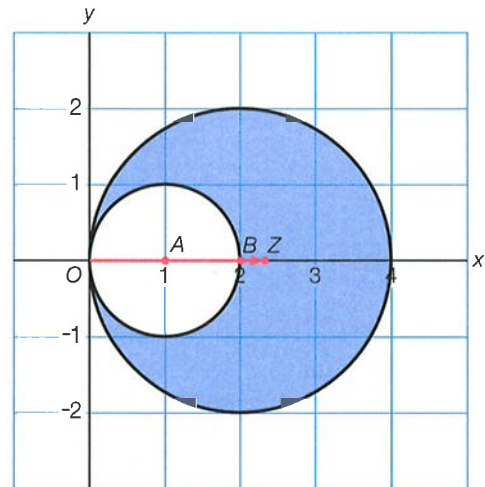
- 10 Zie de figuur hiernaast.

De massa van de cirkel met middelpunt A is $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

De massa van de cirkel met middelpunt B is $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

De totale massa is $4\pi - \pi = 3\pi$.

$$\vec{z} = \frac{1}{3\pi} \left(4\pi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Bladzijde 54

- 11 a $\left. \begin{array}{l} \angle AMP = 90^\circ, \text{ dus } AP^2 = AM^2 + MP^2 \\ AM = BM \\ \angle BMP = 90^\circ, \text{ dus } BP^2 = BM^2 + MP^2 \end{array} \right\} AP^2 = BM^2 + MP^2 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle AMP = 90^\circ \\ AM = BM \\ \angle BMP = 90^\circ \end{array}} \right\} AP^2 = BP^2, \text{ dus } AP = BP$
- b $\left. \begin{array}{l} \angle AQP = 90^\circ, \text{ dus } \sin(\angle PAQ) = \frac{PQ}{AP} \\ \angle ARP = 90^\circ, \text{ dus } \sin(\angle PAR) = \frac{PR}{AP} \\ \angle PAQ = \angle PAR \end{array} \right\} \frac{PQ}{AP} = \frac{PR}{AP}, \text{ dus } PQ = PR$

Bladzijde 56

- 12 a In figuur 14.20 is $x + \circ + \circ + x = 180^\circ$

$$2\circ + 2x = 180^\circ$$

$$2(\circ + x) = 180^\circ$$

$$\circ + x = 90^\circ$$

Dus b_1 en b_2 staan loodrecht op elkaar.

$$\text{b } \frac{|3x + 4y - 24|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 60|}{\sqrt{169}}$$

$$\frac{|3x + 4y - 24|}{5} = \frac{|12x + 5y - 60|}{13}$$

$$5|12x + 5y - 60| = 13|3x + 4y - 24|$$

$$5(12x + 5y - 60) = 13(3x + 4y - 24) \vee 5(12x + 5y - 60) = 13(-3x - 4y + 24)$$

$$60x + 25y - 300 = 39x + 52y - 312 \vee 60x + 25y - 300 = -39x - 52y + 312$$

$$21x - 27y = -12 \vee 99x + 77y = 612$$

$$7x - 9y = -4 \vee 99x + 77y = 612$$

- c De lijn $x - 3y = -14$ oftewel $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{3}$ en is dus stijgend.
De lijn $3x + y = 18$ oftewel $y = -3x + 18$ heeft richtingscoëfficiënt -3 en is dus dalend.
In de figuur zie je dat k een dalende lijn is.
Dus uit de figuur volgt dat $3x + y = 18$ een vergelijking van k is, en niet $x - 3y = -14$.

- 13 a** Uit de eigenschap dat in een ruit de diagonalen de hoeken middendoor delen.

$$b \quad AB = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Omdat $AB = AC$ en p hoek BAD middendoor deelt, ligt er op p een punt D waarvoor $ABCD$ een ruit is met diagonaal AD .

Een ruit is een parallellogram, dus er geldt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Dus $\vec{r}_p = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_p = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } p: x - y = 1.$$

- c** q is de bissectrice van $\angle KLM$ en $\angle KLM = \angle(\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LM})$, dus q is de bissectrice van de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{LK}$ en $\overrightarrow{LM}$.

$$d \quad \overrightarrow{LK} = \vec{k} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\overrightarrow{LM} = \vec{m} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

- e** Nesrin heeft gelijk, want zij gaat uit van een ruit waarvan de zijden lengte $13 \cdot |\overrightarrow{LK}| = 5 \cdot |\overrightarrow{LM}| = 65$ hebben. Thomas gaat niet uit van een ruit.

$$\vec{r}_q = 13 \cdot \overrightarrow{LK} + 5 \cdot \overrightarrow{LM} = 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -112 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{dus } \vec{n}_q = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } q: 8x - y = 18.$$

- 14** $P(x, y)$ op een bissectrice geeft $d(P, k) = d(P, l)$

$$\frac{|3x - 4y - 12|}{5} = \frac{|5x + 12y - 48|}{13}$$

$$13 \cdot |3x - 4y - 12| = 5 \cdot |5x + 12y - 48|$$

$$13(3x - 4y - 12) = 5(5x + 12y - 48) \vee 13(3x - 4y - 12) = 5(-5x - 12y + 48)$$

$$39x - 52y - 156 = 25x + 60y - 240 \vee 39x - 52y - 156 = -25x - 60y + 240$$

$$14x - 112y = -84 \vee 64x + 8y = 396$$

$$x - 8y = -6 \vee 8x + y = 49\frac{1}{2}$$

Dus $m: x - 8y = -6$ en $n: 8x + y = 49\frac{1}{2}$.

De snijpunten met de y -as zijn $A(0, \frac{3}{4})$ en $B(0, 49\frac{1}{2})$.

$$d(A, B) = 49\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 48\frac{3}{4}$$

Bladzijde 57

- 15** $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $AB: 15x + 8y = 180$.

$$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } BC: 3x - 4y = -48.$$

$P(x, y)$ op k en $d(P, AB) = d(P, BC)$ geeft

$$\frac{|15x + 8y - 180|}{\sqrt{289}} = \frac{|3x - 4y + 48|}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{|15x + 8y - 180|}{17} = \frac{|3x - 4y + 48|}{5}$$

$$17 \cdot |3x - 4y + 48| = 5 \cdot |15x + 8y - 180|$$

$$17(3x - 4y + 48) = 5(15x + 8y - 180) \vee 17(3x - 4y + 48) = 5(-15x - 8y + 180)$$

$$51x - 68y + 816 = 75x + 40y - 900 \vee 51x - 68y + 816 = -75x - 40y + 900$$

$$-24x - 108y = -1716 \vee 126x - 28y = 84$$

$$2x + 9y = 143 \vee 9x - 2y = 6$$

Uit de figuur volgt $k: 9x - 2y = 6$.

$$AC: \frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1 \text{ oftewel } AC: x + y = 12$$

$$k \text{ snijden met } AC \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ oftewel } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 24 \\ 11x = 30 \\ x = 2\frac{8}{11} \\ x + y = 12 \end{cases} y = 9\frac{3}{11}$$

Dus $D(2\frac{8}{11}, 9\frac{3}{11})$.

Alternatieve uitwerking

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = 17.$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

$$\vec{r}_k = 5 \cdot \overrightarrow{BA} + 17 \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} + 17 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -68 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ -126 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

en $k: 9x - 2y = 6$.

$$AC: \frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1 \text{ oftewel } AC: x + y = 12$$

$$k \text{ snijden met } AC \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ oftewel } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 24 \\ 11x = 30 \\ x = 2\frac{8}{11} \\ x + y = 12 \end{cases} y = 9\frac{3}{11}$$

Dus $D(2\frac{8}{11}, 9\frac{3}{11})$.

- 16 a** $O(0, 0)$ en $A(8, 0)$, dus de middelloodlijn van OA is de lijn $x = 4$.
 m is de middelloodlijn van OB .

Het midden van OB is het punt $(1, 3)$.

$$\vec{n}_m = \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} x + 3y = c \\ \text{door } (1, 3) \end{matrix} \right\} c = 1 + 3 \cdot 3 = 10$$

Dus $m: x + 3y = 10$.

$$\left. \begin{matrix} x + 3y = 10 \\ x = 4 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 4 + 3y = 10 \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Dus $M(4, 2)$.

- b** $r = d(M, O) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

Dus een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

- 17** M is het midden van het lijnstuk AB en k is de middelloodlijn van het lijnstuk AB .
 N is het midden van het lijnstuk BC en l is de middelloodlijn van het lijnstuk BC .

$$A(3, 0) \text{ en } B(7, 4) \text{ geeft } M(\frac{1}{2}(3 + 7), \frac{1}{2}(0 + 4)) = M(5, 2) \text{ en } \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_k = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } k: x + y = 7.$$

$$B(7, 4) \text{ en } C(5, 6) \text{ geeft } N(\frac{1}{2}(7 + 5), \frac{1}{2}(4 + 6)) = N(6, 5) \text{ en } \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_l = \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } l: x - y = 1.$$

$$k \text{ snijden met } l \text{ geeft } \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \begin{matrix} 2y = 6 \\ y = 3 \\ x + y = 7 \end{matrix} \left. \right\} x = 4$$

Dus $(4, 3)$ is het middelpunt van de cirkel door A , B en C .

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} (x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 \\ \text{door } A(3, 0) \end{matrix}} \right\} r^2 = (3-4)^2 + (0-3)^2 = 1 + 9 = 10$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10 \left. \vphantom{\begin{matrix} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ D(1, 4) \text{ op de cirkel?} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} (1-4)^2 + (4-3)^2 = 10 \\ 9 + 1 = 10 \end{matrix}$$

klopt

Dus D ligt op de cirkel die door A , B en C gaat.

Dus de punten A , B , C en D liggen op één cirkel.

- 18 a** k snijden met de y -as geeft $4y = 12$, dus $y = 3$ en $A(0, 3)$.
 k snijden met l geeft $3x + 4 = 12$ oftewel $3x = 8$, dus $x = 2\frac{2}{3}$ en $S(2\frac{2}{3}, 1)$.

b $P(x, y)$ op een bissectrice geeft $d(P, k) = d(P, l)$

$$\frac{|3x + 4y - 12|}{5} = \frac{|y - 1|}{1}$$

$$|3x + 4y - 12| = 5|y - 1|$$

$$3x + 4y - 12 = 5(y - 1) \vee 3x + 4y - 12 = 5(-y + 1)$$

$$3x + 4y - 12 = 5y - 5 \vee 3x + 4y - 12 = -5y + 5$$

$$3x - y = 7 \vee 3x + 9y = 17$$

Uit de figuur volgt m : $3x - y = 7$ oftewel m : $y = 3x - 7$.

c $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix}$

d $\overrightarrow{AS} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{AP}$ geeft $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix} = 0$$

$$4p - 3(3p - 10) = 0$$

$$4p - 9p + 30 = 0$$

$$-5p = -30$$

$$p = 6$$

Dus $P(6, 11)$.

e $\overrightarrow{SP} = \vec{p} - \vec{s} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - 2\frac{2}{3} \\ 3p - 8 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{SP}$ geeft $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{SP} = 0$

$$\begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p - 2\frac{2}{3} \\ 3p - 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$p(p - 2\frac{2}{3}) + (3p - 10)(3p - 8) = 0$$

$$p^2 - 2\frac{2}{3}p + 9p^2 - 24p - 30p + 80 = 0$$

$$10p^2 - 56\frac{2}{3}p + 80 = 0$$

$$3p^2 - 17p + 24 = 0$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 = 1$$

$$p = \frac{17 \pm 1}{6} = 3 \vee p = \frac{17 - 1}{6} = 2\frac{2}{3}$$

vold. niet

Dus $P(3, 2)$.

Alternatieve uitwerking

$n \perp m$, dus de lijn q door A evenwijdig met n snijdt m loodrecht in P .

Uit b volgt n : $3x + 9y = 17$.

$q \parallel n$ en q door $A(0, 3)$ geeft q : $3x + 9y = 27$ oftewel q : $x + 3y = 9$.

m snijden met q .

Substitutie van $y = 3x - 7$ in $x + 3y = 9$ geeft $x + 3(3x - 7) = 9$

$$x + 9x - 21 = 9$$

$$10x = 30$$

$$x = 3$$

$x = 3$ geeft $y = 9 - 7 = 2$

Dus $P(3, 2)$.

Bladzijde 58

19 a $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{SP}|$ oftewel $|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{SP}|^2$ geeft $p^2 + (3p - 10)^2 = (p - 2\frac{2}{3})^2 + (3p - 8)^2$
 $p^2 + 9p^2 - 60p + 100 = p^2 - 5\frac{1}{3}p + 7\frac{1}{9} + 9p^2 - 48p + 64$
 $-6\frac{2}{3}p = -28\frac{8}{9}$
 $p = 4\frac{1}{3}$

Dus $P(4\frac{1}{3}, 6)$.

b **Mogelijkheid 1:** $\angle AQS = 90^\circ$.

$m \perp n$, dus de lijn q door A evenwijdig met m snijdt n loodrecht in Q .

$q \parallel m$ en q door $A(0, 3)$ geeft $q: y = 3x + 3$.

q snijden met n .

Substitutie van $y = 3x + 3$ in $3x + 9y = 17$ geeft $3x + 9(3x + 3) = 17$

$$3x + 27x + 27 = 17$$

$$30x = -10$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$x = -\frac{1}{3}$ geeft $y = -1 + 3 = 2$

Dus $Q(-\frac{1}{3}, 2)$.

Mogelijkheid 2: $\angle SAQ = 90^\circ$.

$n: 3x + 9y = 17$ oftewel $n: y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{8}{9}$

Stel $Q(q, -\frac{1}{3}q + 1\frac{8}{9})$.

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q + 1\frac{8}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \text{ geeft } \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9} \end{pmatrix} = 0$$

$$4q - 3(-\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9}) = 0$$

$$4q + q + 3\frac{1}{3} = 0$$

$$5q = -3\frac{1}{3}$$

$$q = -\frac{2}{3}$$

Dus $Q(-\frac{2}{3}, 2\frac{1}{9})$.

20 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_k = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } k: x + 2y = 6.$$

k snijden met de x -as geeft $D(6, 0)$.

$$\vec{n}_m = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } m: 3x + y = 13.$$

m snijden met k geeft het punt E .

$$\begin{cases} x + 2y = 6 & |1 \\ 3x + y = 13 & |2 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 6x + 2y = 26 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -5x = -20 \\ x = 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ x + 2y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 2y = 6 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $E(4, 1)$.

Geval 1: $\angle DPE = 90^\circ$. $m \perp AC$, dus de lijn p door D evenwijdig met AC snijdt m loodrecht in P . $p \parallel AC$ en p door $D(6, 0)$ geeft $p: x - 3y = 6$. m snijden met p geeft het punt P .

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \begin{matrix} |3| \\ |1| \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 3y = 39 \\ x - 3y = 6 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 10x = 45 \\ x = 4\frac{1}{2} \\ x - 3y = 6 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 4\frac{1}{2} - 3y = 6 \\ -3y = 1\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Dus $P(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$$DP^2 = (4\frac{1}{2} - 6)^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2} \text{ en } EP^2 = (4\frac{1}{2} - 4)^2 + (-\frac{1}{2} - 1)^2 = 2\frac{1}{2}$$

Dus in dit geval is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.**Geval 2:** $\angle EDP = 90^\circ$.

$$\vec{n}_{DP} = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geeft } DP: 2x - y = 12$$

 DP snijden met m geeft het punt P .

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x + y = 13 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 5x = 25 \\ x = 5 \\ 2x - y = 12 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 10 - y = 12 \\ y = -2 \end{matrix}$$

Dus $P(5, -2)$.

$$DE^2 = (4 - 6)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ en } DP^2 = (5 - 6)^2 + (-2 - 0)^2 = 5$$

Dus in dit geval is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.Conclusie: in beide gevallen is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.

14.2 Cirkels en raaklijnen

Bladzijde 60

- 21 a 1
b 2
c 2
d 2

Bladzijde 61

22 $r_1 = r_2 = d(M, k) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$M_1(-1, 0), \text{ dus } c_1: (x+1)^2 + y^2 = 8.$$

$$M_2(4, 5), \text{ dus } c_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 8.$$

23 a $b = -4a + \frac{2}{3}$ invullen in $|3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ geeft $|3a - 1 - 4a + \frac{2}{3}| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$$|-a - \frac{1}{3}| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

kwadrateren geeft

$$a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 - \frac{2}{3}a + 4\frac{8}{9} = 0$$

$$36a^2 - 6a + 44 = 0$$

$$18a^2 - 3a + 22 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 18 \cdot 22 = -1575$$

 $D < 0$, dus $b = -4a + \frac{2}{3}$ voldoet niet.

- b Elke lijn $k: y = ax + b$ heeft een richtingscoëfficiënt, dus de verticale richting sluit je hiermee uit.

Bladzijde 62

- 24**
- Stel
- $M(2p, p)$
- is een punt op
- m
- .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|2 \cdot 2p - p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2p - 2p - 5|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|4p - p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$$

$$|3p - 1| = |-5|$$

$$3p - 1 = 5 \vee 3p - 1 = -5$$

$$3p = 6 \vee 3p = -4$$

$$p = 2 \vee p = -\frac{4}{3}$$

$$r_1 = r_2 = d(M, k) = d(M, l) = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$p = 2$ geeft $M(4, 2)$, dus $c_1: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

$p = -\frac{4}{3}$ geeft $M(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$, dus $c_2: (x + \frac{8}{3})^2 + (y + \frac{4}{3})^2 = 5$.

- 25**
- Voor het middelpunt
- M
- van de cirkels geldt
- $d(M, k) = d(M, l)$
- .

Dus M ligt op de bissectrices van de lijnen k en l .

Omdat M ook op m ligt, kun je de coördinaten van M_1 en M_2 vinden door de bissectrices van k en l te snijden met m .

- 26 a**
- $M(5, 0)$
- en
- $r_1 = 3$
- .

$N(14, 0)$ en $r_2 = 6$.

$$d(M, N) = 14 - 5 = 9$$

$$d(M, N) - r_1 - r_2 = 9 - 3 - 6 = 0$$

Dus de cirkels raken elkaar.

- b**
- De cirkels raken elkaar op de
- x
- as in het punt
- $(8, 0)$
- .

De verticale raaklijn in dat punt is de lijn $k_1: x = 8$.

Stel $k: y = ax + b$ oftewel $k: ax - y + b = 0$.

$$d(M, k) = 3 \text{ geeft } \frac{|5a - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$$

$$|5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$d(N, k) = 6 \text{ geeft } \frac{|14a - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 6$$

$$|14a + b| = 6\sqrt{a^2 + 1}$$

Hieruit volgt $2|5a + b| = |14a + b|$

$$2(5a + b) = 14a + b \vee 2(5a + b) = -14a - b$$

$$10a + 2b = 14a + b \vee 10a + 2b = -14a - b$$

$$b = 4a \vee 3b = -24a$$

$$b = 4a \vee b = -8a$$

$$b = 4a \text{ invullen in } |5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \text{ geeft } |5a + 4a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|9a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$81a^2 = 9a^2 + 9$$

$$72a^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{1}{8}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \vee a = -\sqrt{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{2} \text{ geeft } b = \sqrt{2} \text{ en } a = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \text{ geeft } b = -\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } k_2: y = \frac{1}{4}x\sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ en } k_3: y = -\frac{1}{4}x\sqrt{2} - \sqrt{2}.$$

Hiermee zijn de drie lijnen gevonden, dus $b = -8a$ voldoet niet.

27 $m: x - 2y = -4$ oftewel $m: y = \frac{1}{2}x + 2$

Stel $M(2p, p + 2)$ is een punt op m .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 2p - (p + 2)|}{\sqrt{10}} = \frac{|2p - 3(p + 2) + 8|}{\sqrt{10}}$$

$$|6p - p - 2| = |2p - 3p - 6 + 8|$$

$$|5p - 2| = |-p + 2|$$

$$5p - 2 = -p + 2 \vee 5p - 2 = p - 2$$

$$6p = 4 \vee 4p = 0$$

$$p = \frac{2}{3} \vee p = 0$$

$$p = \frac{2}{3} \text{ geeft } M_1(1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}) \text{ en } r_1 = d(M_1, k) = \frac{|3 \cdot 1\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}|}{\sqrt{10}} = \frac{|1\frac{1}{3}|}{\sqrt{10}} = \frac{1\frac{1}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{4}{3\sqrt{10}}, \text{ dus } r_1^2 = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}.$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 1\frac{1}{3})^2 + (y - 2\frac{2}{3})^2 = \frac{8}{45}.$$

$$p = 0 \text{ geeft } M_2(0, 2) \text{ en } r_2 = d(M_2, k) = \frac{|3 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}, \text{ dus } r_2^2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Dus } c_2: x^2 + (y - 2)^2 = \frac{2}{5}.$$

28 Stel $M(2 + 2p, 2 + p)$ is een punt op k .

$l: y = -4x + 8$ oftewel $l: 4x + y - 8 = 0$

$$d(M, l) = d(M, x\text{-as}) \text{ geeft } \frac{|4 \cdot (2 + 2p) + 2 + p - 8|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$$

$$\frac{|8 + 8p + 2 + p - 8|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$$

$$\frac{|9p + 2|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{|9x + 2|}{\sqrt{17}} \text{ en } y_2 = |2 + x|.$$

De optie snijpunt geeft $x = -0,780...$ en $x = 1,280...$

Dus $M(0,438...; 1,219...)$ en $N(4,561...; 3,280...)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(4,561... - 0,438...)^2 + (3,280... - 1,219...)^2} \approx 4,61$$

Bladzijde 63

29 a M_1 en M_2 liggen op de bissectrices van k en l , en tevens op afstand $\sqrt{10}$ van k en l .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|3x - y - 9|}{\sqrt{10}} = \frac{|x - 3y - 3|}{\sqrt{10}}$$

$$3x - y - 9 = x - 3y - 3 \vee 3x - y - 9 = -x + 3y + 3$$

$$2x + 2y = 6 \vee 4x - 4y = 12$$

$$x + y = 3 \vee x - y = 3$$

Uit de figuur volgt dat M_1 op $x + y = 3$ ligt.

M_1 op $x + y = 3$ en $x_{M_1} = p$ geeft $M_1(p, 3 - p)$.

$$d(M_1, k) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|3p - (3 - p) - 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|3p - 3 + p - 9| = 10$$

$$|4p - 12| = 10$$

$$4p - 12 = 10 \vee 4p - 12 = -10$$

$$4p = 22 \vee 4p = 2$$

$$p = 5\frac{1}{2} \vee p = \frac{1}{2}$$

$p = 5\frac{1}{2}$ geeft $M_1(5\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$ vold. niet

$p = \frac{1}{2}$ geeft $M_1(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

Uit de figuur volgt dat M_2 op $x - y = 3$ ligt
 M_2 op $x - y = 3$ en $y_{M_2} = q$ geeft $M_2(q + 3, q)$.

$$d(M_2, k) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|3(q+3) - q - 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|3q + 9 - q - 9| = 10$$

$$|2q| = 10$$

$$2q = 10 \vee 2q = -10$$

$$q = 5 \vee q = -5$$

$q = 5$ geeft $M_2(8, 5)$

$q = -5$ geeft $M_2(-2, -5)$ vold. niet

b De staal r_3 van c_3 is $r_3 = d(M_1, M_2) = \sqrt{(8 - \frac{1}{2})^2 + (5 - 2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$.

Om vergelijkingen van de gemeenschappelijke raaklijnen van c_2 en c_3 op te stellen,

gebruik je dat de afstand van M_1 tot deze raaklijnen gelijk is aan $\sqrt{62\frac{1}{2}}$ en de afstand van M_2 tot deze raaklijnen gelijk is aan $\sqrt{10}$.

Stel $m: y = ax + b$ oftewel $m: ax - y + b = 0$ is een gemeenschappelijke raaklijn van c_2 en c_3 .

$$d(M_1, m) = \sqrt{62\frac{1}{2}} \text{ geeft } \frac{|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$$

$$|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = \sqrt{62\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$d(M_2, m) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|8a - 5 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|8a - 5 + b| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

Hieruit volgt $|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = \sqrt{6\frac{1}{4}} \cdot |8a - 5 + b|$

$$|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = 2\frac{1}{2} \cdot |8a - 5 + b|$$

$$\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2}(8a - 5 + b) \vee \frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2}(-8a + 5 - b)$$

$$\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = 20a - 12\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}b \vee \frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = -20a + 12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}b$$

$$-1\frac{1}{2}b = 19\frac{1}{2}a - 10 \vee 3\frac{1}{2}b = -20\frac{1}{2}a + 15$$

$$b = -13a + 6\frac{2}{3} \vee b = -5\frac{6}{7}a + 4\frac{2}{7}$$

Substitutie van $b = -13a + 6\frac{2}{3}$ in $|8a - 5 + b| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|8a - 5 - 13a + 6\frac{2}{3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$

$$|-5a + 1\frac{2}{3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$25a^2 - 16\frac{2}{3}a + 2\frac{7}{9} = 10a^2 + 10$$

$$15a^2 - 16\frac{2}{3}a - 7\frac{2}{9} = 0$$

$$27a^2 - 30a - 13 = 0$$

$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 27 \cdot -13 = 2304$$

$$a = \frac{30 \pm 48}{54} = 1\frac{4}{9} \vee a = \frac{30 - 48}{54} = -\frac{1}{3}$$

$a = 1\frac{4}{9}$ geeft $b = -13 \cdot 1\frac{4}{9} + 6\frac{2}{3} = -12\frac{1}{9}$, dus $m_1: y = 1\frac{4}{9}x - 12\frac{1}{9}$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -13 \cdot -\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} = 11$, dus $m_2: y = -\frac{1}{3}x + 11$.

Hiermee zijn de twee gemeenschappelijke raaklijnen gevonden, dus $b = -5\frac{6}{7}a + 4\frac{2}{7}$ voldoet niet.

30 $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_{x-as} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en l de bissectrice van $\angle(k, x-as)$ geeft $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus voor een punt P op l geldt $P(3p, p)$.

De straal van c_1 is 1, dus $M(3, 1)$ en $OM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Zie de figuur hiernaast.

De straal van c_2 is gelijk aan r gesteld.

$\triangle OAM \sim \triangle MCN$ geeft

$$\frac{OM}{MN} = \frac{AM}{CN}$$

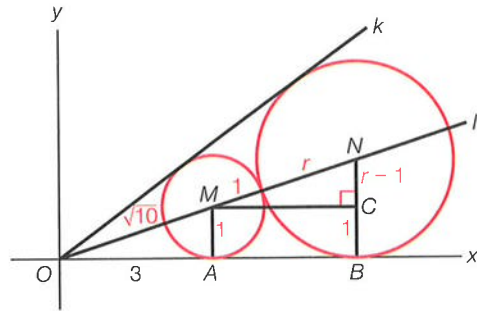
$$\frac{\sqrt{10}}{r+1} = \frac{1}{r-1}$$

$$r\sqrt{10} - \sqrt{10} = r + 1$$

$$r\sqrt{10} - r = \sqrt{10} + 1$$

$$r(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{10} + 1$$

$$r = \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} - 1} = \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} - 1} \cdot \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} + 1} = \frac{10 + 2\sqrt{10} + 1}{10 - 1} = 1\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{10}$$



31 a $AM = 10$, $AN = 10 - r$ en $MN = r + 10$.

c raakt de positieve x -as in A , dus MA staat loodrecht op de x -as, dus $\angle MAN = 90^\circ$.

De stelling van Pythagoras in driehoek AMN geeft $AN^2 + AM^2 = MN^2$, dus

$$(10 - r)^2 + 10^2 = (r + 10)^2.$$

b Haakjes wegwerken geeft $100 - 20r + r^2 + 100 = r^2 + 20r + 100$

$$-40r = -100$$

$$r = 2\frac{1}{2}$$

Dus $d: (x - 2\frac{1}{2})^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$.

Bladzijde 64

32 a Stel de straal van d gelijk aan r .

Zie de figuur hiernaast.

$MP = 8$, $NP = 6 - r$ en $MN = r + 8$.

De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft

$$MP^2 + NP^2 = MN^2$$

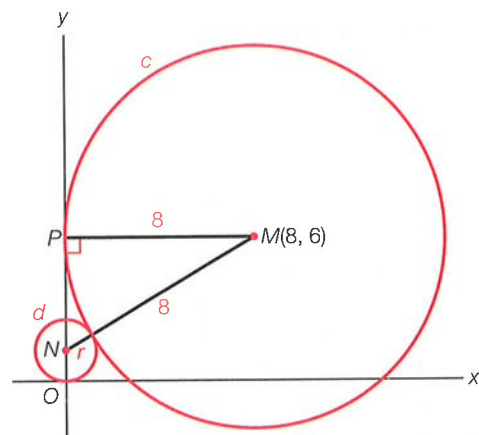
$$8^2 + (6 - r)^2 = (r + 8)^2$$

$$64 + 36 - 12r + r^2 = r^2 + 16r + 64$$

$$-28r = -36$$

$$r = 1\frac{2}{7}$$

Dus $d: x^2 + (y - 1\frac{2}{7})^2 = 1\frac{32}{49}$.



b Noem deze cirkel e en stel de straal van e gelijk aan r .

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft

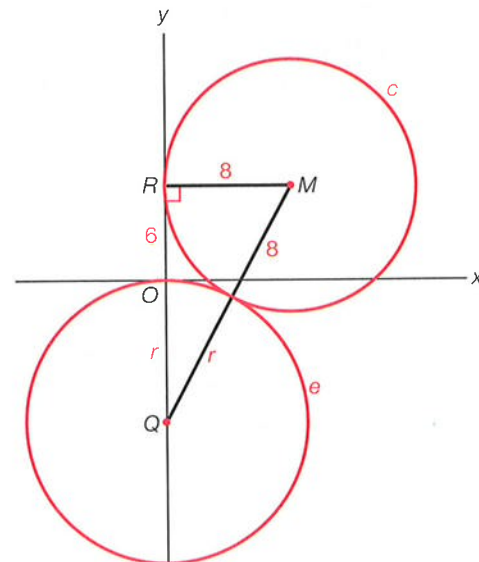
$$8^2 + (r + 6)^2 = (r + 8)^2$$

$$64 + r^2 + 12r + 36 = r^2 + 16r + 64$$

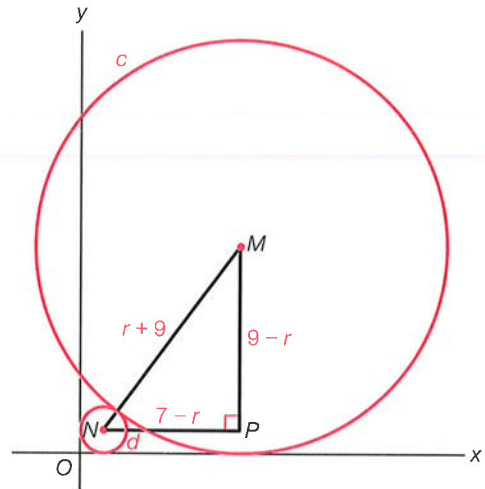
$$-4r = -36$$

$$r = 9$$

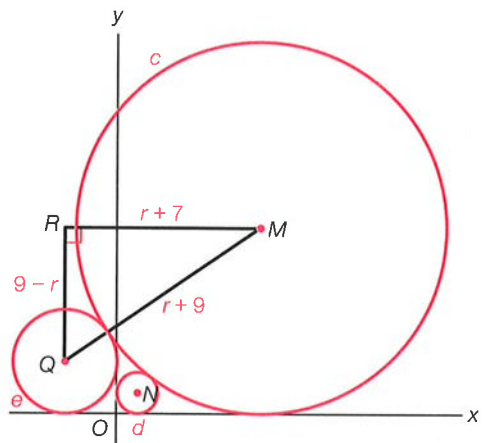
Dus $e: x^2 + (y + 9)^2 = 81$.



- 33 a** De straal van c is 9.
 Stel de straal van d gelijk aan r .
 Zie de figuur hiernaast.
 $MP = 9 - r$, $NP = 7 - r$ en $MN = r + 9$.
 De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft
 $MP^2 + NP^2 = MN^2$
 $(9 - r)^2 + (7 - r)^2 = (r + 9)^2$
 $81 - 18r + r^2 + 49 - 14r + r^2 = r^2 + 18r + 81$
 $r^2 - 50r + 49 = 0$
 $(r - 1)(r - 49) = 0$
 $r = 1 \vee r = 49$
 vold. niet
 Dus d : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

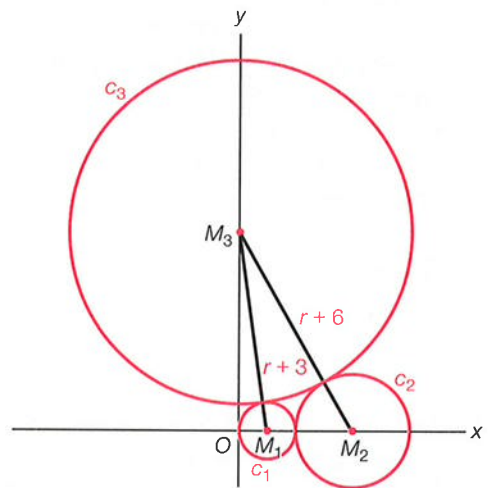


- b** Stel de straal van e gelijk aan r .
 Zie de figuur hiernaast.
 De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft
 $QR^2 + MR^2 = QM^2$
 $(9 - r)^2 + (r + 7)^2 = (r + 9)^2$
 $81 - 18r + r^2 + r^2 + 14r + 49 = r^2 + 18r + 81$
 $r^2 - 22r + 49 = 0$
 $D = (-22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 288$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
 $r = \frac{22 + 12\sqrt{2}}{2} = 11 + 6\sqrt{2} \vee r = 11 - 6\sqrt{2}$
 vold. niet

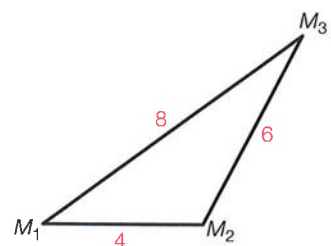


Bladzijde 65

- 34 a** Zie de figuur hiernaast.
 $OM_1 = 3$, $OM_2 = 12$, $OM_3 = p$, $M_1M_3 = r + 3$ en
 $M_2M_3 = r + 6$.
 De stelling van Pythagoras in driehoek OM_1M_3 geeft
 $OM_1^2 + OM_3^2 = M_1M_3^2$
 $3^2 + p^2 = (r + 3)^2$
 $p^2 + 9 = (r + 3)^2$
 De stelling van Pythagoras in driehoek OM_2M_3 geeft
 $OM_2^2 + OM_3^2 = M_2M_3^2$
 $12^2 + p^2 = (r + 6)^2$
 $p^2 + 144 = (r + 6)^2$
b $p^2 + 9 = (r + 3)^2$ oftewel $p^2 = (r + 3)^2 - 9$
 $p^2 + 144 = (r + 6)^2$ oftewel $p^2 = (r + 6)^2 - 144$
 Dit geeft $(r + 3)^2 - 9 = (r + 6)^2 - 144$
 $r^2 + 6r + 9 - 9 = r^2 + 12r + 36 - 144$
 $-6r = -108$
 $r = 18$
 $r = 18$ geeft $p^2 = (18 + 3)^2 - 9 = 432$, dus $p = \sqrt{432} = 12\sqrt{3} \vee p = -12\sqrt{3}$
 vold. niet
 Dus $p = 12\sqrt{3}$ en $r = 18$.



- 35 a** De cosinusregel in driehoek $M_1M_2M_3$ geeft
 $M_1M_3^2 = M_1M_2^2 + M_2M_3^2 - 2 \cdot M_1M_2 \cdot M_2M_3 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $64 = 16 + 36 - 48 \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $48 \cos(\angle M_1M_2M_3) = -12$
 $\cos(\angle M_1M_2M_3) = -\frac{1}{4}$
 $\angle M_1M_2M_3 \approx 104,5^\circ$



- b In driehoek $M_1M_2M_3$ is $M_1M_2 = 4$, $M_1M_3 = r + 3$ en $M_2M_3 = r + 1$.

De cosinusregel in driehoek $M_1M_2M_3$ geeft $(r + 3)^2 = 4^2 + (r + 1)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (r + 1) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$

$$r^2 + 6r + 9 = 16 + r^2 + 2r + 1 - 8(r + 1)\cos(\angle M_1M_2M_3)$$

$$8(r + 1)\cos(\angle M_1M_2M_3) = -4r - 8$$

$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{-4r - 8}{8r + 8} = \frac{4(-r - 2)}{4(2r + 2)} = \frac{-r - 2}{2r + 2}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-r - 2}{2r + 2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{2}{r}}{2 + \frac{2}{r}} = \frac{-1 - 0}{2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \angle M_1M_2M_3 = 120^\circ$$

Zie a, voor $r = 5$ is $\angle M_1M_2M_3 \approx 104,5^\circ < 120^\circ$.

Dus er zijn geen waarden van r waarvoor $\angle M_1M_2M_3$ groter dan of gelijk aan 120° wordt.

- c De straal van c_1 is 3 en $OM_2 = 1$.

Stel $x_{M_3} = p$.

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek PM_1M_3 geeft

$$M_1P^2 + PM_3^2 = M_1M_3^2$$

$$(p + 3)^2 + r^2 = (r + 3)^2$$

$$p^2 + 6p + 9 + r^2 = r^2 + 6r + 9$$

$$p^2 + 6p = 6r$$

$$p^2 = -6p + 6r$$

De stelling van Pythagoras in driehoek PM_2M_3 geeft

$$M_2P^2 + PM_3^2 = M_2M_3^2$$

$$(p - 1)^2 + r^2 = (r + 1)^2$$

$$p^2 - 2p + 1 + r^2 = r^2 + 2r + 1$$

$$p^2 - 2p = 2r$$

$$p^2 = 2p + 2r$$

$$\text{Hieruit volgt } -6p + 6r = 2p + 2r$$

$$4r = 8p$$

$$r = 2p$$

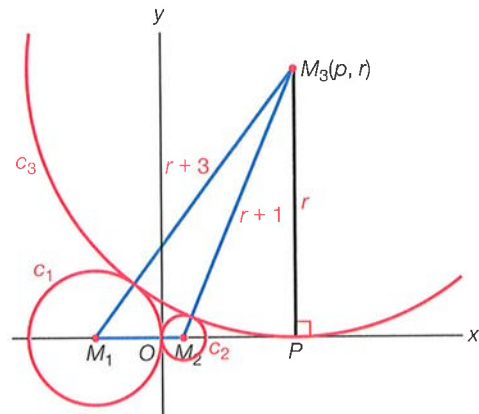
$$\left. \begin{array}{l} p^2 = 2p + 2r \\ r = 2p \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 = 2p + 2 \cdot 2p \\ p^2 = 6p \end{array}$$

$$p = 0 \vee p = 6$$

vold. niet

$$p = 6 \text{ geeft } r = 12$$

Dus $M_3(6, 12)$.



Bladzijde 66

- 36 Zie de figuur hiernaast.

De straal van d is gelijk aan r_d gesteld.

De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft

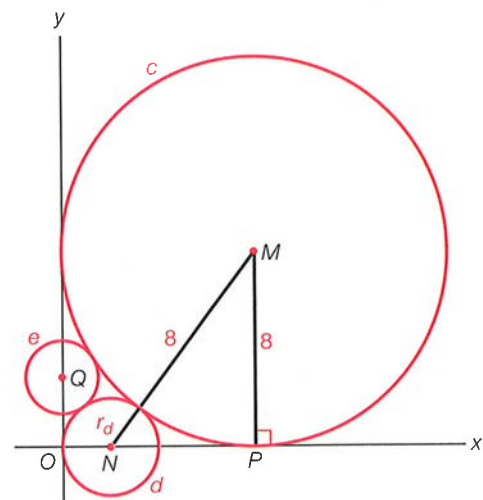
$$PM^2 + PN^2 = MN^2$$

$$8^2 + (8 - r_d)^2 = (r_d + 8)^2$$

$$64 + 64 - 16r_d + r_d^2 = r_d^2 + 16r_d + 64$$

$$-32r_d = -64$$

$$r_d = 2$$



Stel $Q(0, q)$ en de straal van e gelijk aan r_e .

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek ONQ geeft

$$ON^2 + OQ^2 = NQ^2$$

$$2^2 + q^2 = (r_e + 2)^2$$

$$4 + q^2 = r_e^2 + 4r_e + 4$$

$$q^2 - r_e^2 = 4r_e$$

De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft

$$QR^2 + MR^2 = MQ^2$$

$$(8 - q)^2 + 8^2 = (r_e + 8)^2$$

$$64 - 16q + q^2 + 64 = r_e^2 + 16r_e + 64$$

$$q^2 - r_e^2 = 16r_e + 16q - 64$$

Hieruit volgt $16r_e + 16q - 64 = 4r_e$

$$16q = -12r_e + 64$$

$$q = -\frac{3}{4}r_e + 4$$

$$\left. \begin{aligned} q^2 - r_e^2 &= 4r_e \\ q &= -\frac{3}{4}r_e + 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (-\frac{3}{4}r_e + 4)^2 - r_e^2 &= 4r_e \\ \frac{9}{16}r_e^2 - 6r_e + 16 - r_e^2 &= 4r_e \end{aligned}$$

$$\frac{9}{16}r_e^2 - 6r_e + 16 - r_e^2 = 4r_e$$

$$-\frac{7}{16}r_e^2 - 10r_e + 16 = 0$$

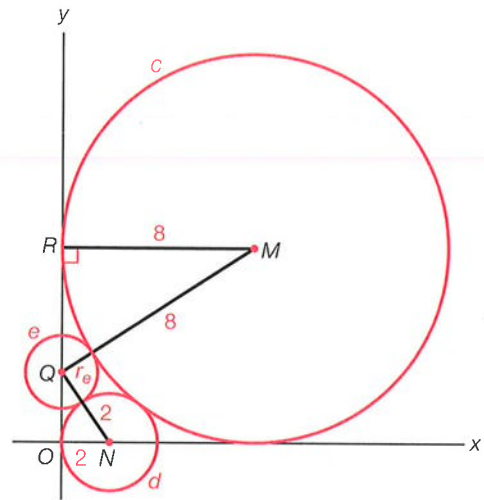
$$7r_e^2 + 160r_e - 256 = 0$$

$$D = 160^2 - 4 \cdot 7 \cdot -256 = 32768, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{32768} = 128\sqrt{2}$$

$$r_e = \frac{-160 + 128\sqrt{2}}{14} = -11\frac{3}{7} + 9\frac{1}{7}\sqrt{2} \vee r_e = \frac{-160 - 128\sqrt{2}}{14} = -11\frac{3}{7} - 9\frac{1}{7}\sqrt{2}$$

vold. niet

Dus de straal van e is $-11\frac{3}{7} + 9\frac{1}{7}\sqrt{2}$.



14.3 Cirkels en snijpunten

Bladzijde 68

- 37 a** Substitutie van $y = -x - 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0$ geeft $x^2 + (-x - 1)^2 - 10x - 4(-x - 1) - 3 = 0$
 $x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x + 4x + 4 - 3 = 0$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$D = 0$, dus de k en c hebben één punt gemeenschappelijk.

Dus k raakt aan c .

- $$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad & x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0 \\ & x^2 - 10x + y^2 - 4y - 3 = 0 \\ & (x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0 \\ & (x-5)^2 + (y-2)^2 = 32 \end{aligned}$$

Dus $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

$$M(5, 2) \text{ en } k: x + y + 1 = 0 \text{ geeft } d(M, k) = \frac{|5 + 2 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|8|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

$d(M, k) = r$, dus k raakt aan c .

Bladzijde 69

- 38 a** $D = 484$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{484} = 22$.
 $x = \frac{12 + 22}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{12 - 22}{10} = -1$
 $x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 3 = 3\frac{4}{5}$
 $x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 - 3 = -5$
 De snijpunten zijn $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ en $(-1, -5)$.

- b** $d(M, k) < r$ geeft $\frac{|4 \cdot 5 - 1 - q|}{\sqrt{17}} < \sqrt{17}$ en dit geeft $2 < q < 36$.

- 39 a** Van c_1 is het middelpunt $M(2, 1)$ en de straal $r = \sqrt{13}$.

$$k: y = x - 3 \text{ oftewel } k: x - y - 3 = 0$$

$$d(M, k) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$d(M, k) < r$, dus k snijdt c_1 in twee punten.

- b** $l: 2x + y = 7$ oftewel $l: y = -2x + 7$

$$\begin{aligned} \text{Substitutie van } y = -2x + 7 \text{ in } x^2 + y^2 + 2x + 2y = 18 \text{ geeft } x^2 + (-2x + 7)^2 + 2x + 2(-2x + 7) &= 18 \\ x^2 + 4x^2 - 28x + 49 + 2x - 4x + 14 &= 18 \\ 5x^2 - 30x + 45 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ D &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \end{aligned}$$

$D = 0$, dus l raakt c_2 .

- c** Van c_3 is het middelpunt $M(4, -1)$ en de straal $r = 3$.

$$d(M, m) = \frac{|4 - 3 \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$d(M, m) > r$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3 .

- 40 a** $k: x - y + 1 = 0$ oftewel $k: y = x + 1$

Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft

$$x^2 + (x + 1)^2 - 10x - 2(x + 1) + 9 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x - 2x - 2 + 9 = 0$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 4$$

$x = 1$ en $y = x + 1$ geeft het snijpunt $(1, 2)$.

$x = 4$ en $y = x + 1$ geeft het snijpunt $(4, 5)$.

- b** Substitutie van $x = t + 1 \wedge y = 2t + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ geeft

$$(t + 1)^2 + (2t + 1)^2 - 8(t + 1) - 4(2t + 1) + 10 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 - 8t - 8 - 8t - 4 + 10 = 0$$

$$5t^2 - 10t = 0$$

$$5t(t - 2) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 2$$

$t = 0$ geeft het snijpunt $(1, 1)$.

$t = 2$ geeft het snijpunt $(3, 5)$.

Bladzijde 70

- 41 a** $2x - 3y + 4 = 0$ geeft $2x = 3y - 4$ oftewel $x = 1\frac{1}{2}y - 2$.

Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ in $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$ geeft

$$(1\frac{1}{2}y - 2 - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26.$$

Voer in $y_1 = (1\frac{1}{2}x - 8)^2 + (x - 1)^2$ en $y_2 = 26$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $x = 6$.

Dus $y = 2$ en $y = 6$.

$y = 2$ en $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ geeft het snijpunt $(1, 2)$.

$y = 6$ en $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ geeft het snijpunt $(7, 6)$.

- b** $3x + 4y = 19$ geeft $4y = -3x + 19$ oftewel $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$.

Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12 = 0.$$

Voer in $y_1 = x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12$.

De optie nulpunt geeft $x = 5$.

$x = 5$ geeft $y = 1$

Het gemeenschappelijke punt is $(5, 1)$.

- 42 a** Van c is het middelpunt $M(5, 1)$ en de straal $r = \sqrt{20}$.

$$k: y = ax + 1 \text{ oftewel } k: ax - y + 1 = 0$$

$$d(M, k) = \frac{|5a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|5a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$d(M, k) < r \text{ geeft } \frac{|5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} < \sqrt{20}$$

$$|5a| < \sqrt{20a^2 + 20}$$

$$25a^2 < 20a^2 + 20$$

$$5a^2 < 20$$

$$a^2 < 4$$

$$-2 < a < 2$$

- b** $l: y = \frac{1}{2}x + b$ oftewel $l: \frac{1}{2}x - y + b = 0$

$$d(M, l) = \frac{|\frac{1}{2} \cdot 5 - 1 + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} = \frac{|1\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

$$d(M, k) > r \text{ geeft } \frac{|1\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} > \sqrt{20}$$

$$|1\frac{1}{2} + b| > \sqrt{25}$$

$$|1\frac{1}{2} + b| > 5$$

$$1\frac{1}{2} + b > 5 \vee 1\frac{1}{2} + b < -5$$

$$b < -6\frac{1}{2} \vee b > 3\frac{1}{2}$$

- 43 a** Het midden M van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(-1 + 7), \frac{1}{2}(3 + -1))$ oftewel $M(3, 1)$.

$$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ en } M(3, 1) \text{ geeft } c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20.$$

$$\text{Substitutie van } x = -2 + 3t \wedge y = 6 - t \text{ in } (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20 \text{ geeft } (-2 + 3t - 3)^2 + (6 - t - 1)^2 = 20$$

$$(3t - 5)^2 + (5 - t)^2 = 20$$

$$9t^2 - 30t + 25 + 25 - 10t + t^2 = 20$$

$$10t^2 - 40t + 30 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t - 1)(t - 3) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 3$$

$t = 1$ geeft het snijpunt $(1, 5)$.

$t = 3$ geeft het snijpunt $(7, 3)$.

- b** $k: y = -2x + p$ oftewel $k: 2x + y - p = 0$

$$d(M, k) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 - p|}{\sqrt{5}} = \frac{|7 - p|}{\sqrt{5}}$$

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|7 - p|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20}$$

$$|7 - p| = \sqrt{100}$$

$$|7 - p| = 10$$

$$7 - p = 10 \vee 7 - p = -10$$

$$p = -3 \vee p = 17$$

c $l: y = qx - 5\frac{1}{2}$ oftewel $l: qx - y - 5\frac{1}{2} = 0$

$$d(M, l) = \frac{|3q - 1 - 5\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}} = \frac{|3q - 6\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}}$$

$$d(M, l) > r \text{ geeft } \frac{|3q - 6\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}} > \sqrt{20}$$

$$|3q - 6\frac{1}{2}| > \sqrt{20q^2 + 20}$$

$$9q^2 - 39q + 42\frac{1}{4} > 20q^2 + 20$$

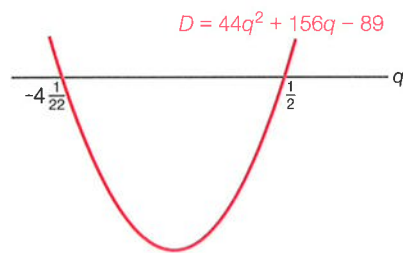
$$-11q^2 - 39q + 22\frac{1}{4} > 0$$

$$44q^2 + 156q - 89 < 0$$

$$44q^2 + 156q - 89 = 0$$

$$D = 156^2 - 4 \cdot 44 \cdot -89 = 40\,000$$

$$q = \frac{-156 + 200}{88} = \frac{1}{2} \vee q = \frac{-156 - 200}{88} = -4\frac{1}{22}$$



$$44q^2 + 156q - 89 < 0 \text{ geeft } -4\frac{1}{22} < q < \frac{1}{2}$$

44 $\left. \begin{array}{l} x^2 + (y-2)^2 = r^2 \\ \text{door } (0, 0) \end{array} \right\} r^2 = 0^2 + (-2)^2 = 4$

Dus c: $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Substitutie van $y = ax^2$ in $x^2 + (y-2)^2 = 4$ geeft $x^2 + (ax^2 - 2)^2 = 4$

$$x^2 + a^2x^4 - 4ax^2 + 4 = 4$$

$$a^2x^4 + x^2 - 4ax^2 = 0$$

$$x^2(a^2x^2 + 1 - 4a) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

$$x = 0 \vee a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

Drie gemeenschappelijke punten in het geval $a^2x^2 + 1 - 4a = 0$ twee oplossingen heeft.

$$a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

$$a^2x^2 = 4a - 1$$

$$x^2 = \frac{4a - 1}{a^2}$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen als $\frac{4a - 1}{a^2} > 0$

$$4a - 1 > 0$$

$$4a > 1$$

$$a > \frac{1}{4}$$

Dus voor $a > \frac{1}{4}$ hebben de parabool en de cirkel drie gemeenschappelijke punten.

45 a $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x-3)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$
 $x^2 - (x-3)^2 = 9$

Oplossen geeft $x^2 - (x^2 - 6x + 9) = 9$

$$x^2 - x^2 + 6x - 9 = 9$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

b De lijn $x = 3$ gaat door de snijpunten A en B van de cirkels.

Bladzijde 71

46

$$\begin{aligned}
 \text{a } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \end{cases} & \quad \begin{aligned} 12x - 4y - 24 &= 0 \\ 3x - y - 6 &= 0 \\ y &= 3x - 6 \end{aligned} \\
 x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 & \quad \left. \begin{aligned} x^2 + (3x - 6)^2 - 2x - 4(3x - 6) &= 0 \\ x^2 + 9x^2 - 36x + 36 - 2x - 12x + 24 &= 0 \\ 10x^2 - 50x + 60 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x - 2)(x - 3) &= 0 \\ x = 2 \vee x = 3 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$x = 2$ en $y = 3x - 6$ geeft het snijpunt $B(2, 0)$.

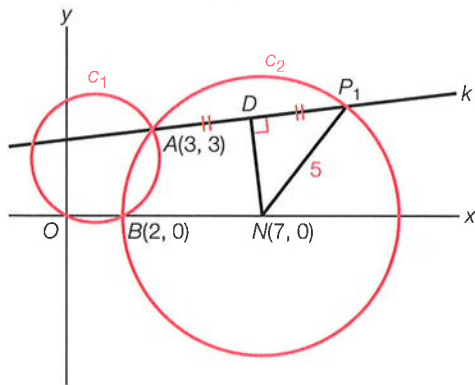
$x = 3$ en $y = 3x - 6$ geeft het snijpunt $A(3, 3)$.

$$\text{b } \begin{cases} y = ax + b \\ \text{door } A(3, 3) \end{cases} \quad \begin{aligned} 3a + b &= 3 \\ b &= 3 - 3a \end{aligned}$$

Dus $k: y = ax + 3 - 3a$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } c_2: x^2 + y^2 - 14x + 24 &= 0 \\
 x^2 - 14x + y^2 + 24 &= 0 \\
 (x - 7)^2 - 49 + y^2 + 24 &= 0 \\
 (x - 7)^2 + y^2 &= 25
 \end{aligned}$$

Dus middelpunt $N(7, 0)$ en straal 5.



De loodlijn ND op AP_1 deelt AP_1 middendoor, dus $DP_1 = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De stelling van Pythagoras in driehoek DNP_1 geeft $DN = \sqrt{5^2 - (2\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{d } d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|7a - 0 + 3 - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \\
 |4a + 3| &= 2\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2} \\
 16a^2 + 24a + 9 &= 6\frac{1}{4}(2a^2 + 2) \\
 16a^2 + 24a + 9 &= 12\frac{1}{2}a^2 + 12\frac{1}{2} \\
 3\frac{1}{2}a^2 + 24a - 3\frac{1}{2} &= 0 \\
 D = 24^2 - 4 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{2} &= 625 \\
 a = \frac{-24 \pm 25}{7} &= \frac{1}{7} \vee a = \frac{-24 - 25}{7} = -7
 \end{aligned}$$

$$\text{e } a = \frac{1}{7} \text{ geeft } k_1: y = \frac{1}{7}x + 3 - \frac{3}{7}$$

$$a = -7 \text{ geeft } k_2: y = -7x + 3 + 21$$

Dus $k_1: y = \frac{1}{7}x + 2\frac{4}{7}$ en $k_2: y = -7x + 24$.

Bladzijde 72

47 $AP = 5\sqrt{2}$ geeft dat P op de cirkel met middelpunt A en straal $5\sqrt{2}$ ligt.

Dus $c_3: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 50$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 50$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 32 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y - 32 = 0 \end{cases} \quad \underline{-}$$

$$-8x + 6y + 56 = 0$$

$$8x = 6y + 56$$

$$x = \frac{3}{4}y + 7$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \\ x = \frac{3}{4}y + 7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \left(\frac{3}{4}y + 7\right)^2 + y^2 - 14\left(\frac{3}{4}y + 7\right) + 24 &= 0 \\ \frac{9}{16}y^2 + 10\frac{1}{2}y + 49 + y^2 - 10\frac{1}{2}y - 98 + 24 &= 0 \\ 1\frac{9}{16}y^2 &= 25 \\ y^2 &= 16 \\ y &= 4 \vee y = -4 \end{aligned}$$

$y = 4$ en $x = \frac{3}{4}y + 7$ geeft $P_1(10, 4)$.

$y = -4$ en $x = \frac{3}{4}y + 7$ geeft $P_2(4, -4)$.

48 $\left. \begin{aligned} y &= ax + b \\ \text{door } B(2, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ b &= -2a \end{aligned}$

Dus $l: y = ax - 2a$ oftewel $l: ax - y - 2a = 0$.

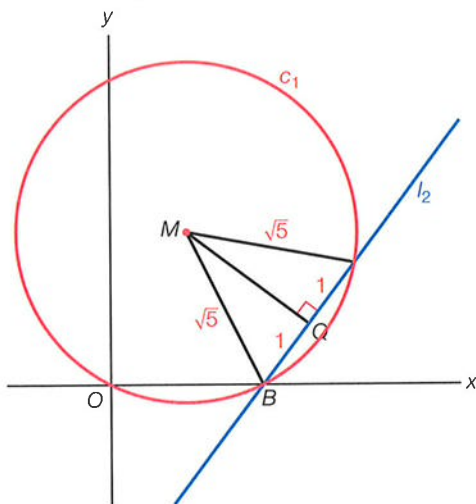
$c_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Dus middelpunt $M(1, 2)$ en straal $\sqrt{5}$.



$MQ = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$, dus $d(M, l) = 2$

$$\frac{|a - 2 - 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$|-a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a^2 + 4a + 4 = 4(a^2 + 1)$$

$$a^2 + 4a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$3a^2 - 4a = 0$$

$$a(3a - 4) = 0$$

$$a = 0 \vee a = 1\frac{1}{3}$$

$a = 0$ geeft $l_1: y = 0$ en $a = 1\frac{1}{3}$ geeft $l_2: y = 1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$.

49 a $M(\frac{1}{2}(4+5), \frac{1}{2}(0+5)) = M(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

$$\left. \begin{aligned} (x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 &= r^2 \\ \text{door } A(4, 0) \end{aligned} \right\} r^2 &= (4 - 4\frac{1}{2})^2 + (0 - 2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } c: (x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 &= 6\frac{1}{2} \\ x^2 - 9x + 20\frac{1}{4} + y^2 - 5y + 6\frac{1}{4} &= 6\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 - 9x - 5y + 20 &= 0 \end{aligned}$$

De lijn door A evenwijdig met OB : $y = x$ heeft vergelijking $y = x - 4$.

$$\begin{aligned} \text{Deze lijn snijden met } c \text{ geeft } x^2 + (x - 4)^2 - 9x - 5(x - 4) + 20 &= 0 \\ x^2 + x^2 - 8x + 16 - 9x - 5x + 20 + 20 &= 0 \\ 2x^2 - 22x + 56 &= 0 \\ x^2 - 11x + 28 &= 0 \\ (x - 4)(x - 7) &= 0 \\ x = 4 \vee x = 7 \end{aligned}$$

$x = 7$ en $y = x - 4$ geeft het punt $E(7, 3)$.

b OB : $y = x$ snijden met c geeft $x^2 + x^2 - 9x - 5x + 20 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 14x + 20 &= 0 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ (x - 2)(x - 5) &= 0 \\ x = 2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

Dus $D(2, 2)$.

d is de cirkel met middelpunt A die door D gaat.

$$\left. \begin{aligned} (x - 4)^2 + y^2 &= r^2 \\ \text{door } D(2, 2) \end{aligned} \right\} r^2 &= (2 - 4)^2 + 2^2 = 8$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } d: (x - 4)^2 + y^2 &= 8 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 &= 8 \\ x^2 + y^2 - 8x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

d snijden met c geeft punt E .

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 - 9x - 5y + 20 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 8 &= 0 \end{aligned} \right. & \quad - \\ -x - 5y + 12 &= 0 \\ x = -5y + 12 & \\ x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0 & \left\{ \begin{aligned} (-5y + 12)^2 + y^2 - 8(-5y + 12) + 8 &= 0 \\ 25y^2 - 120y + 144 + y^2 + 40y - 96 + 8 &= 0 \\ 26y^2 - 80y + 56 &= 0 \\ 13y^2 - 40y + 28 &= 0 \\ D = (-40)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 28 &= 144 \\ y = \frac{40 \pm 12}{26} = 2 \vee y = \frac{40 - 12}{26} &= 1\frac{1}{13} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$y = 1\frac{1}{13}$ en $x = -5y + 12$ geeft het punt $E(6\frac{8}{13}, 1\frac{1}{13})$.

c $\vec{n}_k = \vec{r}_{DM} = \vec{m} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

BC : $y = 5$ snijden met c geeft het punt F .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 9x - 5y + 20 &= 0 \\ y = 5 \end{aligned} \right\} & \quad \begin{aligned} x^2 + 25 - 9x - 25 + 20 &= 0 \\ x^2 - 9x + 20 &= 0 \\ (x - 4)(x - 5) &= 0 \\ x = 4 \vee x = 5 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $F(4, 5)$.

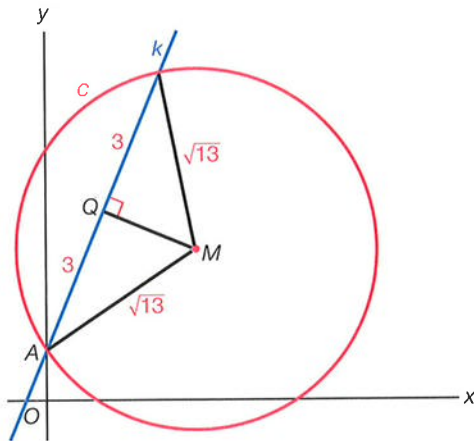
$$\vec{n}_l = \vec{r}_{FM} = \vec{m} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_k \cdot \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 - 5 = 0, \text{ dus } k \perp l, \text{ dus } \angle DGF = 90^\circ.$$

Uit de omgekeerde stelling van Thales volgt dat DF een middellijn is van de cirkel door D , F en G , dus G ligt op de cirkel met middellijn DF .

Bladzijde 73

50 a $r_c = d(A, M) = \sqrt{(3-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
 $k: y = ax + 1$ oftewel $k: ax - y + 1 = 0$



$$MQ = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2$$

$$\begin{aligned} M(3, 3) \text{ en } d(M, k) = 2 \text{ geeft } & \frac{|3a - 3 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \\ |3a - 2| &= 2\sqrt{a^2 + 1} \\ 9a^2 - 12a + 4 &= 4(a^2 + 1) \\ 9a^2 - 12a + 4 &= 4a^2 + 4 \\ 5a^2 - 12a &= 0 \\ a(5a - 12) &= 0 \\ a = 0 \vee 5a - 12 &= 0 \\ a = 0 \vee a &= 2\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Dus $k_1: y = 1$ en $k_2: y = 2\frac{2}{5}x + 1$.

$$\mathbf{b} \quad O(OAMB) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$$

$A(0, 1)$ en $B(1, 0)$ geeft $AB = \sqrt{2}$.

$$\sin(\frac{1}{2} \angle AMB) = \frac{\frac{1}{2}AB}{r_c} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{2} \angle AMB = 11,30...^\circ$$

$$\angle AMB = 22,61...^\circ$$

De oppervlakte van cirkelsector ABM is $\frac{22,61...}{360} \cdot \pi \cdot (\sqrt{13})^2 = 2,566...$

Dus $O(V) = 3 - 2,566... \approx 0,43$.

c De middelloodlijn m van lijnstuk CD is de lijn $m: x = 5\frac{1}{2}$.

n is de middelloodlijn van lijnstuk CM .

Het midden van lijnstuk CM is $(\frac{1}{2}(5+3), \frac{1}{2}(0+3)) = (4, 1\frac{1}{2})$.

$$\vec{n}_n = \vec{r}_{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } n \text{ door } (4, 1\frac{1}{2}) \text{ geeft } n: -2x + 3y = -3\frac{1}{2}.$$

n snijden met m geeft het punt N .

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 3y = -3\frac{1}{2} \\ x = 5\frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -11 + 3y = -3\frac{1}{2} \\ 3y = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

$$y = 2\frac{1}{2}$$

Dus $N(5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$$r_d = d(M, N) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3)^2 + (2\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6\frac{1}{2}}, \text{ dus } d: (x - 5\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 11x + 30\frac{1}{4} + y^2 - 5y + 6\frac{1}{4} = 6\frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 11x - 5y + 30 = 0$$

$$c: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$$

$$c \text{ snijden met } d \text{ geeft } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 11x - 5y + 30 = 0 \end{cases}$$

$$5x - y - 25 = 0$$

$$y = 5x - 25$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0 \left\{ \begin{aligned} &x^2 + (5x - 25)^2 - 6x - 6(5x - 25) + 5 = 0 \\ &x^2 + 25x^2 - 250x + 625 - 6x - 30x + 150 + 5 = 0 \\ &26x^2 - 286x + 780 = 0 \\ &x^2 - 11x + 30 = 0 \\ &(x-5)(x-6) = 0 \\ &x = 5 \vee x = 6 \end{aligned} \right.$$

$x = 6$ geeft $y = 5 \cdot 6 - 25 = 5$, dus $E(6, 5)$.

De totale massa is $3 + 4 + 5 + 8 = 20$.

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{1}{20} (3 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d} + 5 \cdot \vec{e} + 8 \cdot \vec{m}) \\ &= \frac{1}{20} \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{20} \left(\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 93 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{13}{20} \\ 2\frac{9}{20} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dus $Z(4\frac{13}{20}, 2\frac{9}{20})$.

14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

Bladzijde 75

- 51 a** $x = 3 \cos(t) \wedge y = 3 \sin(t)$
b $x = 3 \cos(t) \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} x - 2 = 3 \cos(t)$ oftewel $x = 2 + 3 \cos(t)$
 $y = 3 \sin(t) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y - 4 = 3 \sin(t)$ oftewel $y = 4 + 3 \sin(t)$
 Straal 3 en middelpunt $(2, 4)$.

Bladzijde 76

- 52 a** $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$
 $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 4$
 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$
b $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 1$
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$
c $(x-2\frac{1}{2})^2 + (y-3\frac{1}{2})^2 = 16$
 $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} + y^2 - 7y + 12\frac{1}{4} = 16$
 $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 2\frac{1}{2} = 0$
d $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
- 53 a** $x = -3 + \sqrt{10} \cos(t) \wedge y = -4 + \sqrt{10} \sin(t)$
b $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 13 = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 13 = 0$
 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$
 Dus $x = 2 + 4 \cos(t) \wedge y = 5 + 4 \sin(t)$.
c $x^2 + y^2 + 2y = 0$
 $x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$
 $x^2 + (y+1)^2 = 1$
 Dus $x = \cos(t) \wedge y = -1 + \sin(t)$.

54 Een parametervoorstelling van c is $x = 3 + 5 \cos(t) \wedge y = 4 + 5 \sin(t)$.

Het midden Q van $P(3 + 5 \cos(t), 4 + 5 \sin(t))$ en $A(-5, 2)$ is

$$Q\left(\frac{1}{2}(3 + 5 \cos(t) - 5), \frac{1}{2}(4 + 5 \sin(t) + 2)\right) = Q(-1 + 2\frac{1}{2} \cos(t), 3 + 2\frac{1}{2} \sin(t)).$$

Dus Q ligt op de cirkel $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 6\frac{1}{4}$.

Bladzijde 77

55 $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$

$$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + (y - 2)^2 - 4 + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

Een parametervoorstelling van c_1 is $x = 6 + 2\sqrt{2} \cos(t) \wedge y = 2 + 2\sqrt{2} \sin(t)$.

Het midden van $P(6 + 2\sqrt{2} \cos(t), 2 + 2\sqrt{2} \sin(t))$ en $A(2, 0)$ is

$$Q\left(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{2} \cos(t) + 2), \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2} \sin(t) + 0)\right) = Q(4 + \sqrt{2} \cos(t), 1 + \sqrt{2} \sin(t)).$$

Het midden van $P(6 + 2\sqrt{2} \cos(t), 2 + 2\sqrt{2} \sin(t))$ en $B(-2, 4)$ is

$$R\left(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{2} \cos(t) - 2), \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2} \sin(t) + 4)\right) = R(2 + \sqrt{2} \cos(t), 3 + \sqrt{2} \sin(t)).$$

Het midden van Q en R is

$$S\left(\frac{1}{2}(4 + \sqrt{2} \cos(t) + 2 + \sqrt{2} \cos(t)), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} \sin(t) + 3 + \sqrt{2} \sin(t))\right) = (3 + \sqrt{2} \cos(t), 2 + \sqrt{2} \sin(t)).$$

Dus S doorloopt de cirkel c_2 : $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$ oftewel c_2 : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$.

56 a $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -2 \cos(t) \\ -2 - 2 \sin(t) \end{pmatrix}$ geeft $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_R} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 + 2 \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) + 2 \cos(t) - 2 \\ 2 \sin(t) + 2 \cos(t) + 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } x_B = -2 \sin(t) + 2 \cos(t) - 2 \wedge y_B = 2 \sin(t) + 2 \cos(t) + 2.$$

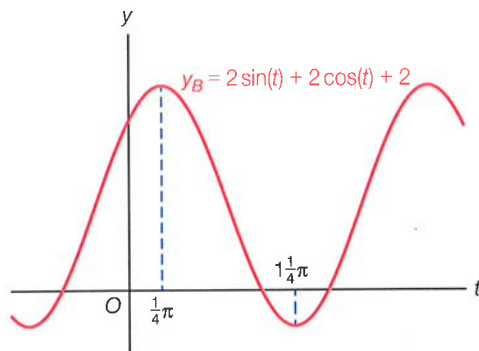
b $\frac{dy_B}{dt} = 2 \cos(t) - 2 \sin(t)$

$$\frac{dy_B}{dt} = 0 \text{ geeft } 2 \cos(t) - 2 \sin(t) = 0$$

$$\sin(t) = \cos(t)$$

$$\tan(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$



y_B is minimaal voor $t = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$t = 1\frac{1}{4}\pi \text{ geeft } A(2 \cos(1\frac{1}{4}\pi), 2 + 2 \sin(1\frac{1}{4}\pi)) = A(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

$$A(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}) \text{ op } y = ax \text{ geeft } -a\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}, \text{ dus } a = 1 - \sqrt{2}.$$

c $x_B = -2 \sin(t) + 2 \cos(t) - 2 \wedge y_B = 2 \sin(t) + 2 \cos(t) + 2$ oftewel

$$x_B + 2 = -2 \sin(t) + 2 \cos(t) \wedge y_B - 2 = 2 \sin(t) + 2 \cos(t)$$

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 + (y - 2)^2 &= (-2 \sin(t) + 2 \cos(t))^2 + (2 \sin(t) + 2 \cos(t))^2 \\ &= 4 \sin^2(t) - 8 \sin(t) \cos(t) + 4 \cos^2(t) + 4 \sin^2(t) + 8 \sin(t) \cos(t) + 4 \cos^2(t) \\ &= 8 \sin^2(t) + 8 \cos^2(t) \\ &= 8(\sin^2(t) + \cos^2(t)) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Dus B doorloopt de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

57 a $x(3) = 3$ en $y(3) = -4$, dus $P(3, -4)$.

b $y = -1$ geeft $t^2 - 4t - 1 = -1$

$$t^2 - 4t = 0$$

$$t(t - 4) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 4$$

$t = 0$ geeft het punt $(6, -1)$ en $t = 4$ geeft het punt $(-\frac{2}{3}, -1)$.

De lengte van het lijnstuk is $6 - (-\frac{2}{3}) = 6\frac{2}{3}$.

c $x = 6$ geeft $\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 = 6$

$$\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t = 0$$

$$\frac{1}{3}t(t^2 - 9t + 15) = 0$$

$$\frac{1}{3}t = 0 \vee t^2 - 9t + 15 = 0$$

$$t = 0 \quad D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 21$$

$$t = 0 \vee t = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \vee t = \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$$

Bladzijde 79

58 a $(t^2 - 6t + 5)^2 = (t^2 - 6t + 5)(t^2 - 6t + 5) = t^4 - 6t^3 + 5t^2 - 6t^3 + 36t^2 - 30t + 5t^2 - 30t + 25 =$

$$t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 25$$

$$(2t - 4)^2 = 4t^2 - 16t + 16$$

$$\text{Dus } v(t) = \sqrt{(t^2 - 6t + 5)^2 + (2t - 4)^2} = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 25 + 4t^2 - 16t + 16} = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}.$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}} \cdot (4t^3 - 36t^2 + 100t - 76) = \frac{2t^3 - 18t^2 + 50t - 38}{\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}}$$

b $x(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 6 = -2\frac{1}{3}$ en $y(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 1 = 4$

$$x(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 6 = -2\frac{1}{3} \text{ en } y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 - 1 = 4$$

Dus de baan van P snijdt zichzelf in het punt $(-2\frac{1}{3}, 4)$.

Bladzijde 80

59 a De verdubbelingsformule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$.

b $\cos(2t) + \sin(t) = 0$

$$\cos(2t) = -\sin(t)$$

$$\cos(2t) = \sin(t + \pi)$$

$$\cos(2t) = \cos(t + \pi - \frac{1}{2}\pi)$$

$$\cos(2t) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi)$$

$$2t = t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -(t + \frac{1}{2}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{6}\pi \vee t = 1\frac{5}{6}\pi$$

c $y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(2 \cdot \frac{1}{2}\pi) = \sin(\pi) = 0$, dus het punt dat hierbij hoort ligt niet op de positieve y -as.

$$y(1\frac{5}{6}\pi) = \sin(2 \cdot 1\frac{5}{6}\pi) = \sin(3\frac{2}{3}\pi) = \sin(1\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ dus het punt dat hierbij hoort ligt niet op de positieve } y\text{-as.}$$

d $x'(\frac{1}{4}\pi) = -2\sin(\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) = -2 \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$

$$x'(\frac{3}{4}\pi) = -2\sin(1\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{3}{4}\pi) = -2 \cdot (-1) - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$$

$$x'(1\frac{1}{4}\pi) = -2\sin(2\frac{1}{2}\pi) + \cos(1\frac{1}{4}\pi) = -2 \cdot 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$$

$$x'(1\frac{3}{4}\pi) = -2\sin(3\frac{1}{2}\pi) + \cos(1\frac{3}{4}\pi) = -2 \cdot (-1) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$$

60 a Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.

$$x'(t) = 0 \text{ geeft } -2\sin(2t) + \cos(t) = 0$$

$$-4\sin(t)\cos(t) + \cos(t) = 0$$

$$\cos(t)(-4\sin(t) + 1) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \vee 4\sin(t) = 1$$

$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \sin(t) = \frac{1}{4} \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2(t) &= 1 \\ \frac{1}{16} + \cos^2(t) &= 1 \\ \cos^2(t) &= \frac{15}{16} \\ \cos(t) &= \frac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15} \end{aligned} \right.$$

c Met de verdubbelingsformules $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ en $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$ krijg je

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + \sin(t) = 1 - 2\sin^2(t) + \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

d $\cos(t) = 0$ met $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{2}\pi$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 0)$

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-2, 0)$

$\sin(t) = \frac{1}{4}$ en $\cos(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ geeft $x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$ en $y = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15} = \frac{1}{8}\sqrt{15}$.

$\sin(t) = \frac{1}{4}$ en $\cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$ geeft $x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$ en $y = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}\sqrt{15} = -\frac{1}{8}\sqrt{15}$.

De punten zijn $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(1\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{15})$ en $(1\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{15})$.

61

$$\text{a } \begin{cases} x(t) = t^2 - 3t + 2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 1 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = 2t - 3 \\ y'(t) = t^2 - 4t + 3 \end{cases}$$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 3$$

$t = 1$ geeft het punt $(0, \frac{1}{3})$

$t = 3$ geeft het punt $(2, -1)$

b $x(t) = 0$ geeft $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 2$$

$y(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = -\frac{1}{3}$, dus raakpunt $(0, -\frac{1}{3})$.

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$k: x + y = c$ door $(0, -\frac{1}{3})$ geeft $k: x + y = -\frac{1}{3}$ oftewel $k: 3x + 3y = -1$.

c $x(t) = 2$ geeft $t^2 - 3t + 2 = 2$

$$t^2 - 3t = 0$$

$$t(t-3) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 3$$

$$x(0) = 2 \text{ en } y(0) = -1$$

$$x(3) = 2 \text{ en } y(3) = -1 \text{ (zie a)}$$

Dus de baan snijdt zichzelf in het punt $(2, -1)$.

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \\ 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus in het punt waarvoor } t = 0 \text{ heeft de raaklijn}$$

richtingscoëfficiënt -1 .

In het punt waarvoor $t = 3$ is de raaklijn horizontaal (zie a).

Dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt, is 45° .

d Voor het snijpunt met de positieve y -as geldt $t = 1$ (zie b).

$$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } v(1) = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

De gevraagde baansnelheid is 1 cm/s .

$$v(t) = \sqrt{(2t-3)^2 + (t^2-4t+3)^2} \text{ geeft}$$

$$a(t) = \frac{1}{2\sqrt{(2t-3)^2 + (t^2-4t+3)^2}} \cdot (2(2t-3) \cdot 2 + 2(t^2-4t+3) \cdot (2t-4)) = \frac{2(2t-3) + (t^2-4t+3)(2t-4)}{\sqrt{(2t-3)^2 + (t^2-4t+3)^2}}$$

$$a(1) = \frac{2(2-3) + (1-4+3)(2-4)}{\sqrt{(2-3)^2 + (1-4+3)^2}} = \frac{2 \cdot -1 + 0 \cdot -2}{\sqrt{1+0}} = -2$$

De gevraagde baanversnelling is -2 cm/s^2 .

Bladzijde 81

62 a $x(t) = 0$ geeft $\cos(t) + \sin(2t) = 0$
 $\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$
 $\cos(t)(1 + 2\sin(t)) = 0$
 $\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = -\frac{1}{2}$
 $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$

$$y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

$$y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) - \cos(3\pi) = 1 - (-1) = 0$$

$$y(\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) - \cos(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$y(\frac{5}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) - \cos(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Er zit $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden tussen deze twee tijdstippen.

b $x(p) = \cos(p) + \sin(2p)$
 $x(\pi - p) = \cos(\pi - p) + \sin(2(\pi - p)) = -\cos(p) + \sin(2\pi - 2p) = -\cos(p) - \sin(2p)$
Dus $x(p) = -x(\pi - p)$.
 $y(p) = \sin(p) - \cos(2p)$
 $y(\pi - p) = \sin(\pi - p) - \cos(2(\pi - p)) = \sin(p) - \cos(2\pi - 2p) = \sin(p) - \cos(2p)$
Dus $y(p) = y(\pi - p)$.

Dus de baan van P is symmetrisch in de y -as.

c $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t) \\ y'(t) = \cos(t) + 2\sin(2t) \end{cases}$
Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.
 $y'(t) = 0$ geeft $\cos(t) + 2\sin(2t) = 0$

$$\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t) = 0$$

$$\cos(t)(1 + 4\sin(t)) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = -\frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee \sin(t) = -\frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ en } t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{3}{2}\pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (0, 2)$$

$$t = \frac{3}{2}\pi \text{ geeft het punt } (0, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(t) &= -\frac{1}{4} \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (-\frac{1}{4})^2 + \cos^2(t) &= 1 \\ \frac{1}{16} + \cos^2(t) &= 1 \end{aligned}$$

$$\cos^2(t) = \frac{15}{16}$$

$$\cos(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) = \cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) = \sin(t) - 2\cos^2(t) + 1 \end{cases}$$

Je krijgt $\begin{cases} x = \frac{1}{4}\sqrt{15} + 2 \cdot -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15} = \frac{1}{8}\sqrt{15} \\ y = -\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{15}{16} + 1 = -1\frac{1}{8} \end{cases}$ en $\begin{cases} x = -\frac{1}{4}\sqrt{15} + 2 \cdot -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}\sqrt{15} = -\frac{1}{8}\sqrt{15} \\ y = -\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{15}{16} + 1 = -1\frac{1}{8} \end{cases}$

Dus horizontale raaklijn in $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(\frac{1}{8}\sqrt{15}, -1\frac{1}{8})$ en $(-\frac{1}{8}\sqrt{15}, -1\frac{1}{8})$.

d $(x'(t))^2 = (-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 = \sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(2t) + 4\cos^2(2t)$
 $(y'(t))^2 = (\cos(t) + 2\sin(2t))^2 = \cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t)$
 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(2t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t)$
 $= \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 4\sin(2t)\cos(t) - 4\cos(2t)\sin(t)$
 $= \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 4(\sin(2t)\cos(t) - \cos(2t)\sin(t))$
 $= 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot \sin(t)$
 $= 5 + 4\sin(t)$

Dus $v(t) = \sqrt{5 + 4\sin(t)}$.

e $\sin(t)$ is maximaal 1 en minimaal -1.

De maximale baansnelheid is $\sqrt{5 + 4 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3$ m/s.

De minimale baansnelheid is $\sqrt{5 + 4 \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$ m/s.

$$\text{f } v(t) = \sqrt{5 + 4 \sin(t)} \text{ geeft } a(t) = \frac{1}{2\sqrt{5 + 4 \sin(t)}} \cdot 4 \cos(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{5 + 4 \sin(t)}}$$

$$a(\pi) = \frac{2 \cos(\pi)}{\sqrt{5 + 4 \sin(\pi)}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \text{ m/s}^2$$

63 a $t = 1$ geeft $P(-4, -4)$ en $Q(2, 5)$.
 $PQ = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{117} \text{ cm}$

b $x = -t + 3$ oftewel $t = -x + 3$
 Dit geeft $y' = 3(-x + 3) + 2 = -3x + 9 + 2 = -3x + 11$.
 Een vergelijking van de baan van Q is $y = -3x + 11$.

c $x_P(t) = x_Q(t) \wedge y_P(t) = y_Q(t)$
 $t^2 - 2t - 3 = -t + 3 \wedge t^2 + t - 6 = 3t + 2$
 $t^2 - t - 6 = 0 \wedge t^2 - 2t - 8 = 0$
 $(t + 2)(t - 3) = 0 \wedge (t + 2)(t - 4) = 0$
 $(t = -2 \vee t = 3) \wedge (t = -2 \vee t = 4)$
 $t = -2$

$$\begin{cases} x'_P(t) = 2t - 2 \\ y'_P(t) = 2t + 1 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x'_Q(t) = -1 \\ y'_Q(t) = 3 \end{cases}$$

Voor de baan van P geldt $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=-2} = \frac{2 \cdot -2 + 1}{2 \cdot -2 - 2} = \frac{1}{2}$.

Voor de baan van Q geldt $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=-2} = \frac{3}{-1} = -3$.

$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26,56...^\circ$

$\tan(\beta) = -3$ geeft $\beta = -71,56...^\circ$

$\alpha - \beta = 98,13...^\circ$

Dus de hoek tussen de banen is ongeveer $180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

d $\left[\frac{dy}{dx}\right]_P = \left[\frac{dy}{dx}\right]_Q$ geeft $\frac{2t+1}{2t-2} = \frac{3}{-1}$
 $6t - 6 = -2t - 1$
 $8t = 5$
 $t = \frac{5}{8}$

$t = \frac{5}{8}$ geeft het punt $(-3\frac{55}{64}, -4\frac{63}{64})$.

e $\vec{v}_P(t) = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{a}_P(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_P(t) \perp \vec{a}_P(t)$ geeft $\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
 $4t - 4 + 4t + 2 = 0$
 $8t = 2$
 $t = \frac{1}{4}$

$t = \frac{1}{4}$ geeft het punt $(-3\frac{7}{16}, -5\frac{11}{16})$.

f $y_P(t) = 0$ geeft $t^2 + t - 6 = 0$
 $(t - 2)(t + 3) = 0$
 $t = 2 \vee t = -3$

$t = 2$ geeft het punt $(-3, 0)$.

$\vec{v}_P(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $v_P(2) = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ cm/s}$

$v_P(t) = \sqrt{(2t-2)^2 + (2t+1)^2} = \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 4t^2 + 4t + 1} = \sqrt{8t^2 - 4t + 5}$ geeft

$a_P(t) = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 4t + 5}} \cdot (16t - 4) = \frac{8t - 2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 5}}$

$a_P(2) = \frac{16 - 2}{\sqrt{32 - 8 + 5}} = \frac{14}{\sqrt{29}} = \frac{14}{29}\sqrt{29} \text{ cm/s}^2$

Bladzijde 82

64 a $y(t) = 0$ geeft $\cos(2t) - \sin(t) = 0$
 $1 - 2\sin^2(t) - \sin(t) = 0$
 $\sin^2(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2} = 0$
 $(\sin(t) + 1)(\sin(t) - \frac{1}{2}) = 0$
 $\sin(t) = -1 \vee \sin(t) = \frac{1}{2}$
 $t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = -1$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus op dit tijdstip is $x_P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b $x(t) = y(t)$ geeft $\sin(2t) + \cos(2t) = \cos(2t) - \sin(t)$
 $\sin(2t) = -\sin(t)$
 $2\sin(t)\cos(t) = -\sin(t)$
 $\sin(t) = 0 \vee 2\cos(t) = -1$
 $t = k \cdot \pi \vee \cos(t) = -\frac{1}{2}$
 $t = k \cdot \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $0 < t < 2\pi$ geeft $t = \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi \vee t = \frac{4}{3}\pi$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$t = \pi$ geeft het punt $(1, 1)$

$t = \frac{4}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$

c $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \cos(2t) \\ y(t) = \cos(2t) - \sin(t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) - 2\sin(2t) \\ y'(t) = -2\sin(2t) - \cos(t) \end{cases}$

$v(t) = \sqrt{(2\cos(2t) - 2\sin(2t))^2 + (-2\sin(2t) - \cos(t))^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(2\cos(2x) - 2\sin(2x))^2 + (-2\sin(2x) - \cos(x))^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 2,62$ en $y \approx 3,77$.

De maximale snelheid van P is ongeveer 3,77.

d $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos(0) - 2\sin(0) \\ -2\sin(0) - \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

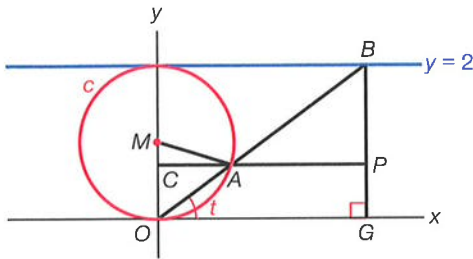
$\vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi) - 2\sin(2\pi) \\ -2\sin(2\pi) - \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos(\angle(\vec{v}(0), \vec{v}(\pi))) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$

Dus $\angle(\vec{v}(0), \vec{v}(\pi)) \approx 53,1^\circ$.

65 a $\sin(t) = \frac{2}{OB}$ geeft $OB = \frac{2}{\sin(t)}$
 $\cos(t) = \frac{x_P}{OB}$ geeft $x_P = OB \cos(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} x_P = \frac{2}{\sin(t)} \cdot \cos(t) = \frac{2\cos(t)}{\sin(t)} \end{array} \right.$

b



$$\angle GOB = t \text{ geeft } \angle MOA = \frac{1}{2}\pi - t$$

$$\triangle OAM \text{ is gelijkbenig, dus } \angle MAO = \angle MOA = \frac{1}{2}\pi - t.$$

$$\text{Hoekensom driehoek in } \triangle OAM \text{ geeft } \angle OMA = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) - (\frac{1}{2}\pi - t) = 2t.$$

$$\cos(\angle OMA) = \frac{CM}{AM} = \frac{1 - y_P}{1} = 1 - y_P \text{ geeft } y_P = 1 - \cos(\angle OMA)$$

$$\text{Dus } y_P = 1 - \cos(2t).$$

$$\text{c } y = \frac{1}{2} \text{ geeft } 1 - \cos(2t) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$0 < t < \pi \text{ geeft } t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } x = \frac{2 \cos(\frac{1}{6}\pi)}{\sin(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } x = \frac{2 \cos(\frac{5}{6}\pi)}{\sin(\frac{5}{6}\pi)} = \frac{2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{3}$$

$$CD = 2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$\text{d } \begin{cases} x(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = \frac{\sin(t) \cdot -2 \sin(t) - 2 \cos(t) \cdot \cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{-2}{\sin^2(t)} \\ y'(t) = 2 \sin(2t) \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } v(\frac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(\frac{1}{2})^2} \\ 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$x(\frac{1}{6}\pi) = 2\sqrt{3} \text{ (zie c) en } y(\frac{1}{6}\pi) = 1 - \cos(\frac{1}{3}\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x\sqrt{3} + 8y &= c \\ \text{door } (2\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} c = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$\text{Dus k: } x\sqrt{3} + 8y = 10.$$

$$\text{e } \begin{cases} x(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases} \text{ invullen in } y = \frac{8}{x^2 + 4} \text{ geeft } 1 - \cos(2t) = \frac{8}{\left(\frac{2 \cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 + 4}$$

$$1 - (1 - 2 \sin^2(t)) = \frac{8}{\frac{4 \cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 4}$$

$$2 \sin^2(t) = \frac{2}{\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 1}$$

$$2 \cos^2(t) + 2 \sin^2(t) = 2$$

$$2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 2$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Dit klopt voor elke } t, \text{ dus voor de baan van } P \text{ geldt } y(x) = \frac{8}{x^2 + 4}.$$

$$f \quad y(x) = \frac{8}{x^2 + 4} \text{ geeft } y'(x) = \frac{0 - 8 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 + 4)^2} \text{ en}$$

$$y''(x) = \frac{(x^2 + 4)^2 \cdot -16 - (-16x) \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-16(x^2 + 4) + 64x^2}{(x^2 + 4)^3} = \frac{48x^2 - 64}{(x^2 + 4)^3}$$

$$y''(x) = 0 \text{ geeft } 48x^2 - 64 = 0$$

$$48x^2 = 64$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ geeft } y = \frac{8}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{24}{4 + 12} = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2} \text{ en } x = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ geeft } y = 1\frac{1}{2}.$$

Dus de buigpunten zijn $(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2})$ en $(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2})$.

Diagnostische toets

Bladzijde 86

1 Zie de figuur hiernaast.

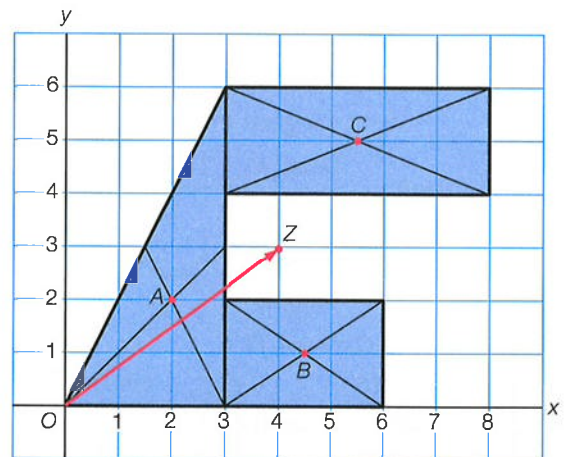
A heeft massa 9.

B heeft massa 6.

C heeft massa 10.

De totale massa is $9 + 6 + 10 = 25$.

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{1}{25}(9 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 10 \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{25}\left(9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{25}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 \\ 50 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\frac{24}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$2 \quad \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\vec{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

$$\vec{r}_b = 5 \cdot \vec{AB} + 13 \cdot \vec{AC} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -39 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$b: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } m: 12x + 5y = c \quad \left. \vphantom{\vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}} \right\} m: 12x + 5y = 62\frac{1}{2}$$

$$m \text{ door } (\frac{1}{2}(-1 + 11), \frac{1}{2}(-2 + 3)) = (5, \frac{1}{2})$$

$$m \text{ snijden met } b \text{ geeft } 12(-1 + 3t) + 5(-2 + 11t) = 62\frac{1}{2}$$

$$-12 + 36t - 10 + 55t = 62\frac{1}{2}$$

$$91t = 84\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{13}{14}$$

$$t = \frac{13}{14} \text{ geeft } x = -1 + \frac{13}{14} \cdot 3 = 1\frac{11}{14} \text{ en } y = -2 + \frac{13}{14} \cdot 11 = 8\frac{3}{14}.$$

Dus $S(1\frac{11}{14}, 8\frac{3}{14})$.

Alternatieve uitwerking

$$\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ en } AB: 5x - 12y = 19.$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } AC: 4x + 3y = -10.$$

$P(x, y)$ op b en $d(P, AB) = d(P, AC)$ geeft

$$\frac{|5x - 12y - 19|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x + 3y + 10|}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{|5x - 12y - 19|}{13} = \frac{|4x + 3y + 10|}{5}$$

$$13 \cdot |4x + 3y + 10| = 5 \cdot |5x - 12y - 19|$$

$$13(4x + 3y + 10) = 5(5x - 12y - 19) \vee 13(4x + 3y + 10) = 5(-5x + 12y + 19)$$

$$52x + 39y + 130 = 25x - 60y - 95 \vee 52x + 39y + 130 = -25x + 60y + 95$$

$$27x + 99y = -225 \vee 77x - 21y = -35$$

$$3x + 11y = -25 \vee 11x - 3y = -5$$

Uit de figuur die bij de situatie hoort, volgt $b: 11x - 3y = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } m: 12x + 5y = c \\ m \text{ door } (\frac{1}{2}(-1 + 11), \frac{1}{2}(-2 + 3)) = (5, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} m: 12x + 5y = 62\frac{1}{2}$$

m snijden met b geeft het punt S .

$$\begin{cases} 12x + 5y = 62\frac{1}{2} \\ 11x - 3y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ oftewel } \begin{cases} 36x + 15y = 187\frac{1}{2} \\ 55x - 15y = -25 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} 91x &= 162\frac{1}{2} \\ x &= 1\frac{11}{14} \\ 12x + 5y &= 62\frac{1}{2} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 12 \cdot 1\frac{11}{14} + 5y &= 62\frac{1}{2} \\ 21\frac{3}{7} + 5y &= 62\frac{1}{2} \\ 5y &= 41\frac{1}{14} \\ y &= 8\frac{3}{14} \end{aligned}$$

Dus $S(1\frac{11}{14}, 8\frac{3}{14})$.

- 3** Stel $M(3p, p)$ is een punt op m .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|2 \cdot 3p - p|}{\sqrt{5}} = \frac{|3p - 2 \cdot p + 8|}{\sqrt{5}}$$

$$|5p| = |p + 8|$$

$$5p = p + 8 \vee 5p = -p - 8$$

$$4p = 8 \vee 6p = -8$$

$$p = 2 \vee p = -1\frac{1}{3}$$

$$p = 2 \text{ geeft } M_1(6, 2) \text{ en } r_1 = d(M_1, k) = \frac{|5 \cdot 2|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 20.$$

$$p = -1\frac{1}{3} \text{ geeft } M_2(-4, -1\frac{1}{3}) \text{ en } r_2 = d(M_2, k) = \frac{|5 \cdot -1\frac{1}{3}|}{\sqrt{5}} = \frac{6\frac{2}{3}}{\sqrt{5}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

$$\text{Dus } c_2: (x + 4)^2 + (y + 1\frac{1}{3})^2 = 8\frac{8}{9}.$$

- 4** a Zie de figuur hiernaast.

Stel de straal van d is gelijk aan r .

Dan is $NP = 5 - r$, $MP = 4 - r$ en $MN = r + 4$.

De stelling van Pythagoras geeft

$$NP^2 + MP^2 = MN^2$$

$$(5 - r)^2 + (4 - r)^2 = (r + 4)^2$$

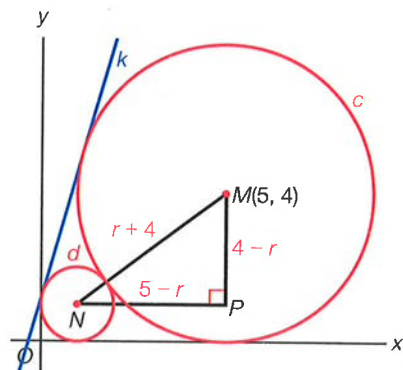
$$25 - 10r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = r^2 + 8r + 16$$

$$r^2 - 26r + 25 = 0$$

$$(r - 1)(r - 25) = 0$$

$$r = 1 \vee r = 25 \text{ (vold. niet)}$$

$$\text{Dus } N(1, 1) \text{ en } d: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$



- b** Stel het middelpunt van cirkel e is Q .
 Stel $l: y = ax + b$ oftewel $l: ax - y + b = 0$.

$$d(Q, l) = 3 \text{ geeft } \frac{|3a - 3 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3 \text{ oftewel } |3a - 3 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}.$$

$$d(M, l) = 4 \text{ geeft } \frac{|5a - 4 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \text{ oftewel } |5a - 4 + b| = 4\sqrt{a^2 + 1}.$$

$$\text{Hieruit volgt } 3 \cdot |5a - 4 + b| = 4 \cdot |3a - 3 + b|$$

$$|15a - 12 + 3b| = |12a - 12 + 4b|$$

$$15a - 12 + 3b = 12a - 12 + 4b \vee 15a - 12 + 3b = -12a + 12 - 4b$$

$$3a - b = 0 \vee 27a - 24 + 7b = 0$$

$$b = 3a \vee 27a - 24 + 7b = 0$$

$$b = 3a \text{ invullen in } |3a - 3 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \text{ geeft } |3a - 3 + 3a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|6a - 3| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|2a - 1| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 1$$

$$3a^2 - 4a = 0$$

$$a(3a - 4) = 0$$

$$a = 0 \vee a = \frac{4}{3}$$

$$a = 0 \text{ geeft de raaklijn } y = 0.$$

$$a = \frac{4}{3} \text{ geeft } b = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ en dit geeft de raaklijn } y = \frac{4}{3}x + 4.$$

$$\text{Dus } l_1: y = 0 \text{ en } l_2: y = \frac{4}{3}x + 4.$$

- 5 a** $y = ax + 2$ substitueren in $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ geeft

$$(x - 3)^2 + (ax)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + a^2x^2 = 4$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 = 36 - 20a^2 - 20 = -20a^2 + 16$$

$$D > 0 \text{ geeft } -20a^2 + 16 > 0$$

$$-20a^2 > -16$$

$$a^2 < \frac{4}{5}$$

$$-\sqrt{\frac{4}{5}} < a < \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$-\frac{2}{5}\sqrt{5} < a < \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

- b** $l: y = \frac{1}{2}x + b$ oftewel $l: x - 2y + 2b = 0$

Van c is het middelpunt $M(3, 2)$ en de straal $r = 2$.

$$d(M, l) > 2 \text{ geeft } \frac{|3 - 4 + 2b|}{\sqrt{5}} > 2$$

$$|-1 + 2b| > 2\sqrt{5}$$

$$-1 + 2b < -2\sqrt{5} \vee -1 + 2b > 2\sqrt{5}$$

$$2b < 1 - 2\sqrt{5} \vee 2b > 1 + 2\sqrt{5}$$

$$b < \frac{1}{2} - \sqrt{5} \vee b > \frac{1}{2} + \sqrt{5}$$

Bladzijde 87

- 6 a** $c_2: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$
 $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 25$
 $x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15$

c_1 en c_2 snijden geeft de punten A en B .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{1cm}}$$

$$12x + 4y = 20$$

$$3x + y = 5$$

$$\begin{aligned}
 y = -3x + 5 \quad & \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x^2 + (-3x + 5)^2 &= 5 \\ x^2 + 9x^2 - 30x + 25 &= 5 \\ 10x^2 - 30x + 20 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x = 1 \vee x = 2 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$x = 2$ en $y = -3x + 5$ geeft het punt $B(2, -1)$.

- b** Zie de figuur hiernaast met Q het midden van lijnstuk AP en NQ loodrecht op k .

De stelling van Pythagoras in driehoek ANQ geeft

$$NQ = \sqrt{5^2 - (2\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - 12\frac{1}{2}} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$k: y = ax + b$ door $A(1, 2)$ geeft $a + b = 2$ oftewel $b = 2 - a$.

Dus $k: y = ax + 2 - a$ oftewel $k: ax - y + 2 - a = 0$.

$$d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|6a - 2 + 2 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|5a| = 2\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2}$$

$$25a^2 = 6\frac{1}{4}(2a^2 + 2)$$

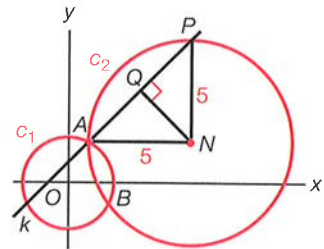
$$25a^2 = 12\frac{1}{2}a^2 + 12\frac{1}{2}$$

$$12\frac{1}{2}a^2 = 12\frac{1}{2}$$

$$a^2 = 1$$

$$a = 1 \vee a = -1$$

$a = 1$ geeft $k_1: y = x + 1$ en $a = -1$ geeft $k_2: y = -x + 3$.



- 7** Een parametervoorstelling van c is $x = 6 + 4\cos(t) \wedge y = 4 + 4\sin(t)$.

Het midden Q van $P(6 + 4\cos(t), 4 + 4\sin(t))$ en $A(-4, 2)$ is

$$Q(\frac{1}{2}(6 + 4\cos(t) - 4), \frac{1}{2}(4 + 4\sin(t) + 2)) = Q(1 + 2\cos(t), 3 + 2\sin(t)).$$

Dus Q ligt op de cirkel $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

- 8 a** $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = -3t^2 + 6t + 9 \end{cases}$

Raaklijn evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$-3t^2 + 6t + 9 = 0 \wedge 2t \neq 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge t \neq 0$$

$$(t + 1)(t - 3) = 0 \wedge t \neq 0$$

$$(t = -1 \vee t = 3) \wedge t \neq 0$$

$$t = -1 \vee t = 3$$

$t = -1$ geeft het punt $(1, -5)$ en $t = 3$ geeft het punt $(9, 27)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de x -as in de punten $(1, -5)$ en $(9, 27)$.

Raaklijn evenwijdig met de y -as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t = 0 \wedge t \neq -1 \wedge t \neq 3$$

$$t = 0$$

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de y -as in het punt $(0, 0)$.

- b** $t = 2$ geeft $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$t = 2$ geeft $A(4, 22)$

$$\begin{cases} 9x - 4y = c \\ A(4, 22) \end{cases} \quad c = 9 \cdot 4 - 4 \cdot 22 = -52$$

Dus $k: 9x - 4y = -52$.

- c** $x = 9$ geeft $t^2 = 9$

$$t = -3 \vee t = 3$$

Zie vraag a, $t = 3$ geeft een horizontale raaklijn.

$$t = -3 \text{ geeft } r_{\text{c raaklijn}} = \frac{y'(-3)}{x'(-3)} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$\tan(\varphi) = 6$ geeft $\varphi \approx 80,5^\circ$

Dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt, is $\varphi \approx 80,5^\circ$.

d $\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ -3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot -1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

De baansnelheid in C is 2 cm/s.

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2} = \sqrt{4t^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2} \text{ en}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2}} \cdot (8t + 2 \cdot (-3t^2 + 6t + 9) \cdot (-6t + 6))$$

$$a(-1) = \frac{1}{2\sqrt{4 + (-3 - 6 + 9)^2}} \cdot (-8 + 2 \cdot (-3 - 6 + 9) \cdot (6 + 6)) = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-8 + 2 \cdot 0 \cdot 12) = \frac{-8}{4} = -2$$

Dus de baanversnelling is -2 cm/s^2 .

9 a $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = t + \cos(t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2 \cos(2t) \\ y'(t) = 1 - \sin(t) \end{cases}$

Raaklijn evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$1 - \sin(t) = 0 \wedge 2 \cos(2t) \neq 0$$

$$\sin(t) = 1 \wedge 2t \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \wedge t \neq \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$t \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi$$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de x -as in het punt $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Raaklijn evenwijdig met de y -as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \wedge t \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } t = -\frac{3}{4}\pi \vee t = -\frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi$$

$$t = -\frac{3}{4}\pi \text{ geeft } (1, -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$t = -\frac{1}{4}\pi \text{ geeft } (-1, -\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$t = \frac{1}{4}\pi \text{ geeft } (1, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ geeft } (-1, \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

Dus de raaklijn is evenwijdig met de y -as in de punten $(1, -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-1, -\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$,

$(1, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-1, \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

b $v(t) = \sqrt{(2 \cos(2t))^2 + (1 - \sin(t))^2}$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{(2 \cos(2x))^2 + (1 - \sin(x))^2}.$$

De optie maximum geeft $x = -1,57079...$ en $y = 2,828...$

$$x(-1,57079...) = 0 \text{ en } y(-1,57079...) = -1,57079... = -\frac{1}{2}\pi$$

Dus de baansnelheid is maximaal in A .

Marijke heeft dus gelijk.